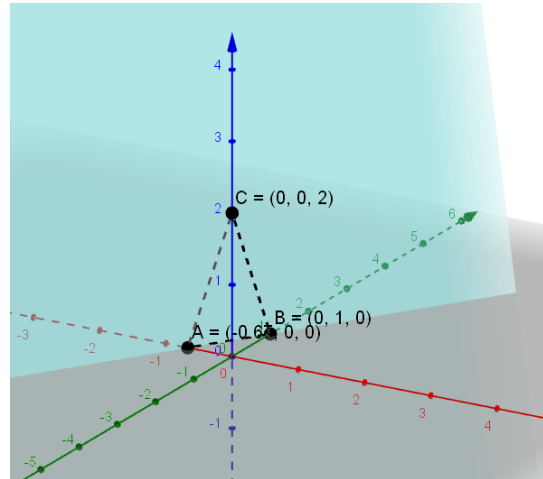


1) Dada la siguiente ecuación de un plano $3x - 2y + z + 2 = 0$

Se pide:

- a) Hallar las intersecciones con los ejes coordenados x, y y z.
- b) Determinar las ecuaciones de las trazas del plano con los planos cartesianos.(XY) (XZ) (YZ)
- c) Graficar en un sistema de Coordenadas cartesianas.



Respuesta:

a) Intersección con los ejes

Intersección con eje X. En ese punto las coordenadas “y” y “z” son iguales a cero, entonces resulta:

$$3x - 2(0) + (0) + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -2/3 = -0,67$$

$$\text{Y dado que } y = z = 0 \Rightarrow P(-0,67 ; 0 ; 0)$$

Intersección con eje Y. En ese punto las coordenadas “x” y “z” son iguales a cero, entonces resulta:

$$3(0) - 2y + (0) + 2 = 0 \Rightarrow 2 = 2y \Rightarrow y = 2/2 = 1$$

$$\text{Y dado que } x = z = 0 \Rightarrow P(0 ; 1 ; 0)$$

Intersección con eje Z. En ese punto las coordenadas “y” y “x” son iguales a cero, entonces resulta:

$$3(0) - 2(0) + z + 2 = 0 \Rightarrow z = -2$$

$$\text{Y dado que } y = x = 0 \Rightarrow P(0 ; 0 ; -2)$$

b) Trazas con los planos coordenados

Con XY En este plano $Z = 0$

$$3x - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 0 + 2 = 0 \Rightarrow 3x - 2y = -2$$

$$\text{Ecuación Paramétrica: } \frac{3}{-2}x + \frac{-2}{-2}y = \frac{-2}{-2} \Rightarrow \frac{3}{-2}x + \frac{1}{1}y = 1$$

$$\frac{x}{-0,67} + \frac{y}{1} = 1$$

=> Puntos de intersección de la recta con los ejes “x” e “y”:

$$(-0,67 ; 0 ; 0) \quad (0 ; 1 ; 0)$$

Con XZ En este plano $Y = 0$

$$3x - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow 3x - 2 \cdot 0 + z + 2 = 0 \Rightarrow 3x + z = -2$$

Ecuación Paramétrica: $\frac{3}{-2}x + \frac{z}{-2} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{2}{3}}x + \frac{z}{-2} = 1$

$$\frac{x}{-0,67} + \frac{z}{-2} = 1$$

$\Rightarrow$ Puntos de intersección de la recta con los ejes "x" y "z":

$$(-0,67 ; 0 ; 0) \quad (0 ; 0 ; -2)$$

Con YZ En este plano $X = 0$

$$3x - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow 3(0) - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow -2y + z = -2$$

Ecuación Paramétrica: $\frac{-2}{-2}y + \frac{z}{-2} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$

$\Rightarrow$ Puntos de intersección de la recta con los ejes "Y" y "Z":

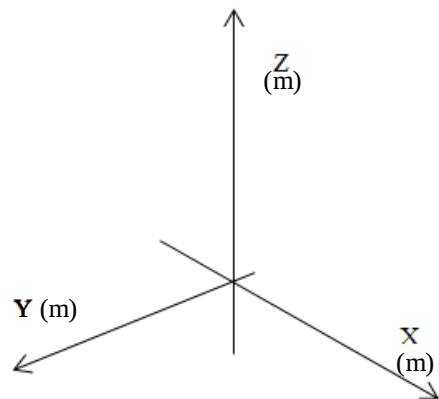
$$(0 ; 1 ; 0) \quad (0 ; 0 ; -2)$$

Notar que coincide con los puntos de intersección que obtuvimos al principio.

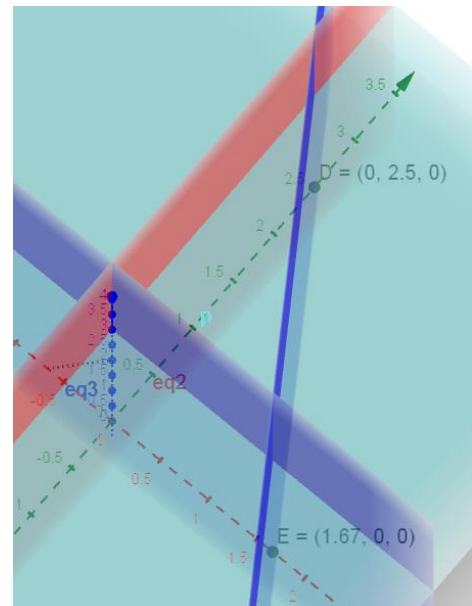
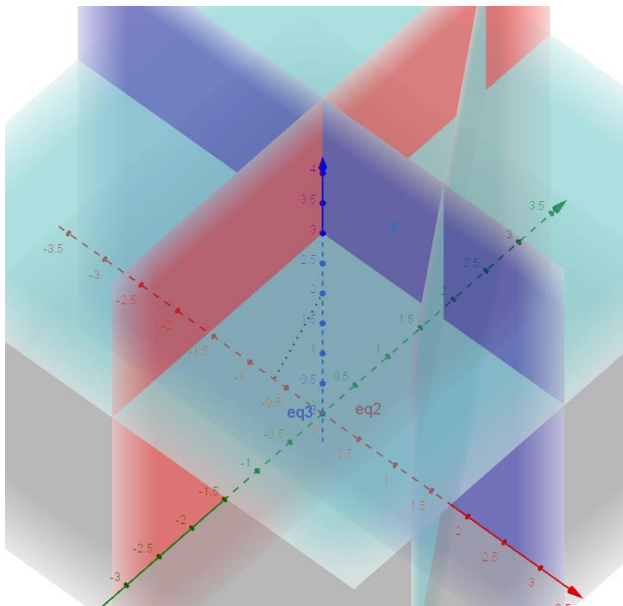
2) Dados dos planos cuyas ecuaciones son:
 $2y + 3x - 5 = 0$ $z = 3$,

Se pide:

- Graficar en un Sistema Cartesiano en el espacio el cuerpo geométrico formado por los planos designados anteriormente y los planos coordenados YZ, XY y XZ.
- Encontrar el volumen del mismo expresado en m^3 .



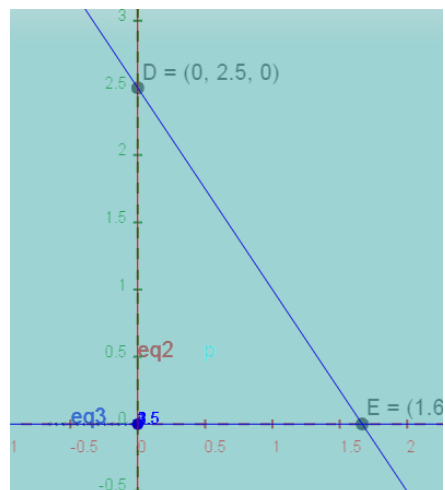
Respuesta:



Vemos que el plano no corta al eje Z y se forma un prisma vertical cuyas caras laterales están formadas por el plano YZ (violeta), el plano XZ (rojo) y el plano que responde a la ecuación dada (Azul en la figura de la derecha).

La base inferior del prisma está dada por el plano XY, en la cota $z = 0$.

La base superior del prisma está dada por el plano paralelo al XY, en la cota $z = 3$.



Vemos que en planta es un triángulo, por lo que para calcular el volumen del prisma tenemos que multiplicar la superficie del triángulo por la altura del prisma, que es de 3 metros.

Comenzamos calculando las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes X e Y para poder conocer las dimensiones de los catetos del triángulo de base:

a) Intersección del plano $2y + 3x - 5 = 0$ con los ejes:

Intersección con eje X. En ese punto las coordenadas “y” y “z” son iguales a cero, entonces resulta:

$$2(0) + 3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = 5/3 = 1,67m$$

Y dado que $y = z = 0 \Rightarrow P(1,67 ; 0 ; 0)$

Intersección con eje Y. En ese punto las coordenadas “x” y “z” son iguales a cero, entonces resulta:

$$2y + 3(0) - 5 = 0 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = 5/2 = 2,5m$$

Y dado que $x = z = 0 \Rightarrow P(0 ; 2,5 ; 0)$

$$\text{Superficie de la base} = \frac{2,5m \times 1,67m}{2} = 2,09 m^2$$

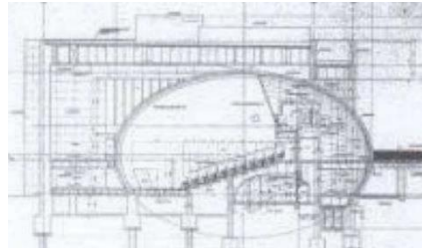
$$\text{Volumen del prisma} = 2,09 m^2 \times 3 m = 6,27 m^3$$

3) La foto corresponde al Inamori Auditorium, del Arq. Tadao Ando.
Asimilaremos esa estructura a un elipsoide de ecuación:

$$\frac{x^2}{21^2} + \frac{y^2}{70^2} + \frac{z^2}{21^2} = 1 \quad (\text{Medidas ficticias en metros})$$

Se pide:

- Calcular la superficie de la traza definida en el plano x z.
- Calcular la superficie de la traza definida en el plano x y.
- Graficar esa superficie en un sistema de ejes cartesianos.



a) Traza sobre plano XZ – Superficie.

$$\frac{x^2}{21^2} + \frac{y^2}{70^2} + \frac{z^2}{21^2} = 1 \quad \text{En XZ será } y = 0, \Rightarrow \frac{x^2}{21^2} + \frac{0^2}{70^2} + \frac{z^2}{21^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{21^2} + \frac{z^2}{21^2} = 1 \Rightarrow x^2 + z^2 = 21^2 \quad (\text{Circunferencia de radio} = 21).$$

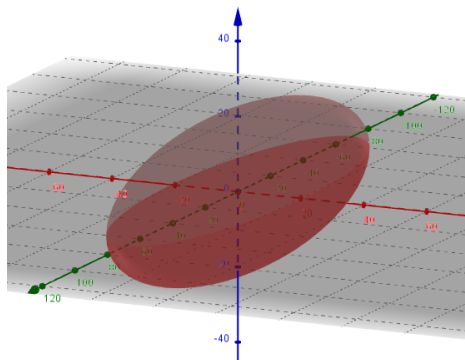
$$\text{Sup} = \pi \times R^2 = \pi \times 21^2 = \mathbf{1385,44 \text{ m}^2}$$

b) Traza sobre plano XY – Superficie.

$$\frac{x^2}{21^2} + \frac{y^2}{70^2} + \frac{z^2}{21^2} = 1 \quad \text{En XY será } z = 0, \Rightarrow \frac{x^2}{21^2} + \frac{y^2}{70^2} + \frac{0^2}{21^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{21^2} + \frac{y^2}{70^2} = 1 \Rightarrow (\text{Elipse; } a = 70 \text{ m} \quad b = 21 \text{ m}).$$

$$\text{Sup} = \pi \times a \times b = \pi \times 70 \times 21 = \mathbf{4618,14 \text{ m}^2}$$



4) La foto corresponde a la Bioesfera de Montreal, del Arq. Fuller. La estructura, de 76 metros de diámetro, tiene su punto más alto a 62 metros desde el nivel de piso.

Asimilaremos esa estructura a una esfera de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 38^2 \quad (\text{Medida en metros})$$

Se pide:

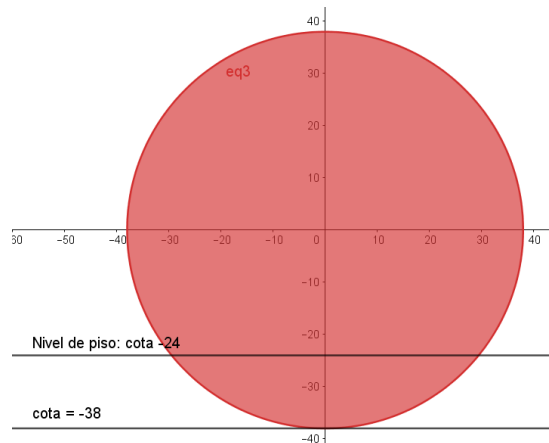
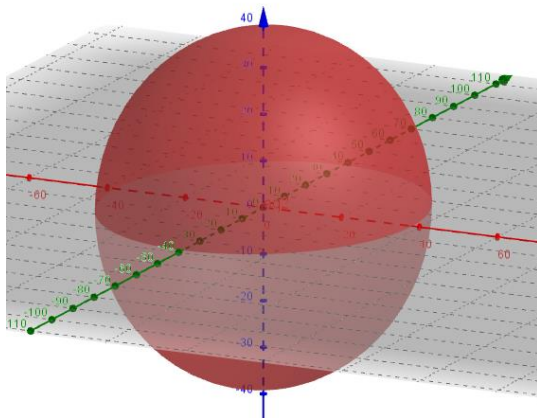
- Ecuación de la traza definida en el plano paralelo a x y correspondiente al nivel de piso.
- Calcular la superficie de la traza definida en ese plano.



$$a) \quad x^2 + y^2 + (-24)^2 = 38^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 576 = 1444 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1444 - 576$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 868 \Rightarrow x^2 + y^2 = 29,46^2 \quad (\text{Circunferencia de } R = 29,46 \text{ m})$$

$$b) \quad \text{Sup} = \pi \times R^2 = \pi \times 29,46^2 = 2726,56 \text{ m}^2$$



5- Dada la ecuación:

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{20^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1$$

Se pide:

- Dar el nombre de la superficie y graficar la superficie cuádrica representada por la ecuación en un sistema de ejes cartesianos indicando las coordenadas cartesianas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.
- Expresar la ecuación de la trazas en los planos XZ e YZ y calcular la superficie encerrada en esos planos.

Respuesta:

- La superficie cuádrica es un elipsoide.

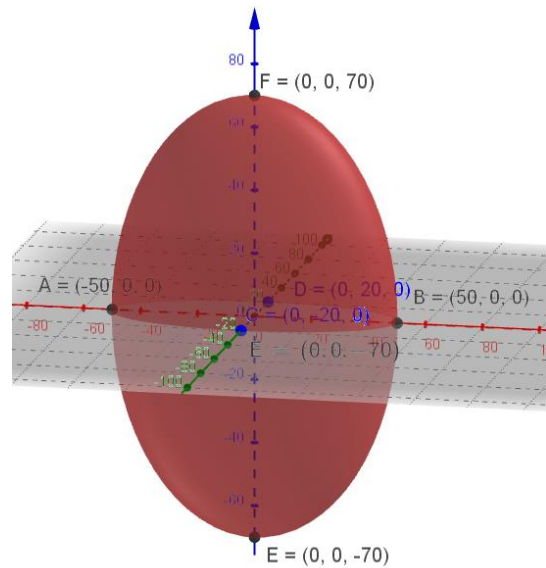
Intersección con los ejes:

Con eje x: tanto "y" como "z" = 0

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{0^2}{20^2} + \frac{0^2}{70^2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 50^2 \Rightarrow x = \sqrt{(50^2)} = \pm 50$$

$$\Rightarrow A (-50 ; 0 ; 0) \quad B (50 ; 0 ; 0)$$



Con eje y: tanto "x" como "z" = 0

$$\frac{0^2}{50^2} + \frac{y^2}{20^2} + \frac{0^2}{70^2} = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 20^2 \Rightarrow y = \sqrt{(20^2)} = \pm 20$$

$$\Rightarrow C (0 ; -20 ; 0) \quad D (0 ; 20 ; 0)$$

Con eje z: tanto "x" como "y" = 0

$$\frac{0^2}{50^2} + \frac{0^2}{20^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1$$

$$\Rightarrow z^2 = 70^2 \Rightarrow z = \sqrt{(70^2)} = \pm 70$$

$$\Rightarrow \mathbf{E (0 ; 0 ; -70) \quad F (0 ; 0 ; 70)}$$

b) Trazas

a) Traza sobre plano XZ – Superficie.

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{20^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1 \quad \text{En XZ será } y = 0, \Rightarrow \frac{x^2}{50^2} + \frac{0^2}{20^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{50^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1 \quad (\text{Elipse con } a = 70\text{m} \quad y \quad b = 50\text{m}).$$

$$\text{Sup} = \pi \times a \times b = \pi \times 70 \times 50 = \mathbf{10995,57 \text{ m}^2}$$

b) Traza sobre plano YZ – Superficie.

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{20^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1 \quad \text{En YZ será } x = 0, \Rightarrow \frac{0^2}{50^2} + \frac{y^2}{20^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{20^2} + \frac{z^2}{70^2} = 1 \quad \Rightarrow (\text{Elipse; } a = 70 \text{ m} \quad b = 20 \text{ m}).$$

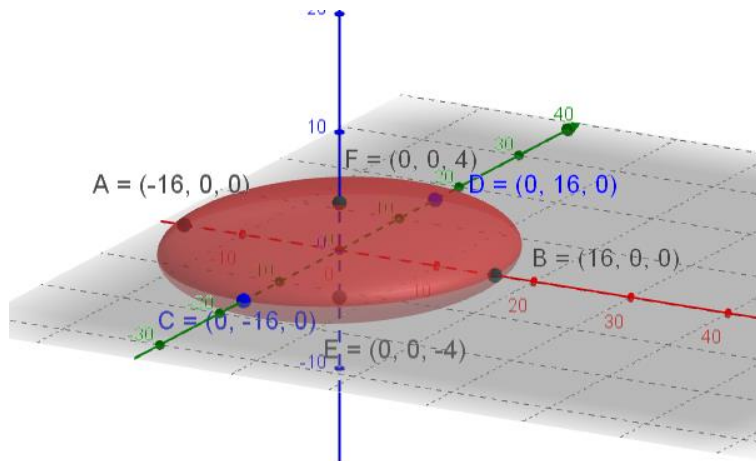
$$\text{Sup} = \pi \times a \times b = \pi \times 70 \times 20 = \mathbf{4398,23 \text{ m}^2}$$

6- Dada la ecuación:

$$\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

Se pide:

- Dar el nombre de la superficie y graficar la superficie cuádrica representada por la ecuación en un sistema de ejes cartesianos indicando las coordenadas cartesianas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.
- Expresar la ecuación de la trazas en los planos XZ e YZ y calcular la superficie encerrada en esos planos.



Respuesta:

- La superficie cuádrica es un elipsoide de revolución.

Intersección con los ejes:

Con eje x: tanto "y" como "z" = 0

$$\frac{x^2}{16^2} + \frac{0^2}{16^2} + \frac{0^2}{4^2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 16^2 \Rightarrow x = \sqrt{16^2} = \pm 16$$

$$\Rightarrow \mathbf{A (-16 ; 0 ; 0) \quad B (16 ; 0 ; 0)}$$

Con eje y: tanto "x" como "z" = 0

$$\frac{0^2}{16^2} + \frac{y^2}{16^2} + \frac{0^2}{4^2} = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 16^2 \Rightarrow y = \sqrt{(16^2)} = \pm 16$$

$$\Rightarrow \mathbf{C (0 ; -16 ; 0) \quad D (0 ; 16 ; 0)}$$

Con eje z: tanto "x" como "y" = 0

$$\frac{0^2}{16^2} + \frac{0^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

$$\Rightarrow z^2 = 4^2 \Rightarrow z = \sqrt{(4^2)} = \pm 4$$

$$\Rightarrow \mathbf{E (0 ; 0 ; -4) \quad F (0 ; 0 ; 4)}$$

$\Rightarrow$

b) Trazas

a) Traza sobre plano XZ – Superficie.

$$\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1 \quad \text{En XZ será } y = 0, \Rightarrow \frac{x^2}{16^2} + \frac{0^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1 \quad (\text{Elipse con } a = 16 \text{ m y } b = 4 \text{ m}).$$

$$\text{Sup} = \pi \times a \times b = \pi \times 16 \times 4 = \mathbf{201,06 \text{ m}^2}$$

b) Traza sobre plano YZ – Superficie.

$$\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1 \quad \text{En YZ será } x = 0, \Rightarrow \frac{0^2}{16^2} + \frac{y^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{16^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1 \Rightarrow (\text{Elipse; } a = 16 \text{ m } \quad b = 4 \text{ m}).$$

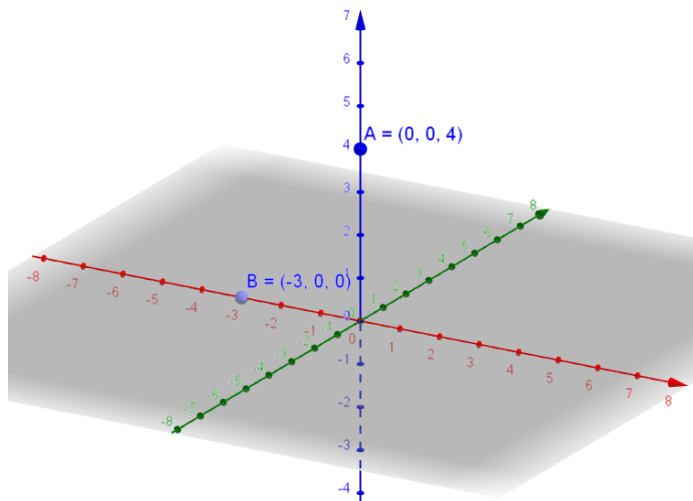
$$\text{Sup} = \pi \times a \times b = \pi \times 16 \times 4 = \mathbf{201,06 \text{ m}^2}$$

7- De un plano en el espacio conocemos las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados cartesianos (que se muestran en gráfico adjunto).

Se pide:

a) La Ecuación general del plano

c) Graficar el plano en un Sistema de ejes cartesianos.



$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Como no hay intersección del plano con el eje y $\Rightarrow$ que $B = 0$

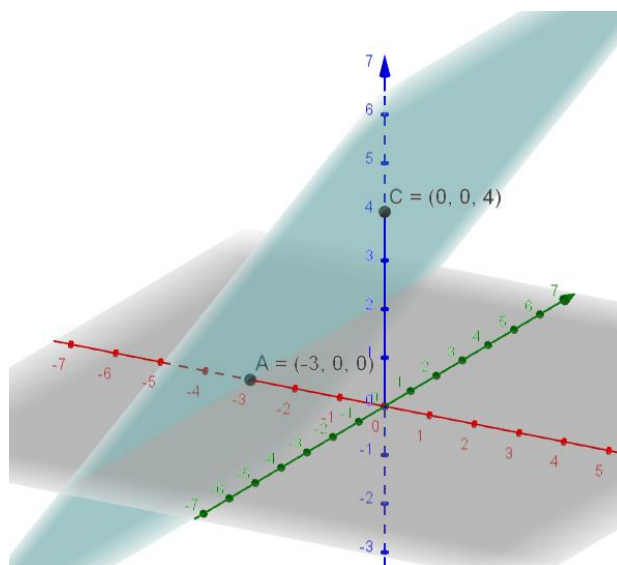
Por lo tanto queda:

$$Ax + Cz + D = 0$$

Planteamos la ecuación segmentaria: $\frac{x}{-3} + \frac{z}{4} = 1$

Multiplicamos ambos miembros por -12 ($= -3 \times 4$) para obtener los valores de D, A y C:

$$\frac{-12x}{-3} + \frac{-12z}{4} = -12 \Rightarrow +4x - 3z = -12 \Rightarrow \mathbf{4x - 3z + 12 = 0}$$



8- Dada la ecuación:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1$$

Se pide:

a) Dar el nombre de la superficie y graficar la superficie cuádrica representada por la ecuación en un sistema de ejes cartesianos indicando las coordenadas cartesianas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.

b) Expresar la ecuación de la trazas en los planos XZ, YZ y XY. Calcular la superficie encerrada en el plano XY.

Respuesta:

a) La superficie cuádrica es un hiperboloide de una hoja, No corta al eje z.

Intersección con los ejes:

Con eje x: tanto "y" como "z" = 0

$$\frac{x^2}{25} + \frac{0^2}{36} - \frac{0^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{(25)} = +/- 5$$

$$\Rightarrow A (-5 ; 0 ; 0) \quad B (5 ; 0 ; 0)$$

Con eje y: tanto "x" como "z" = 0

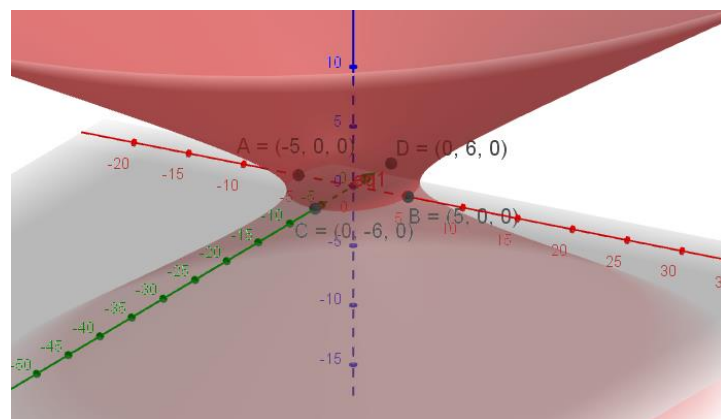
$$\frac{0}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{0^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{(36)} = +/- 6$$

$$\Rightarrow C (0 ; -6 ; 0) \quad D (0 ; 6 ; 0)$$

Con eje z:

No hay intersección



b) Trazas

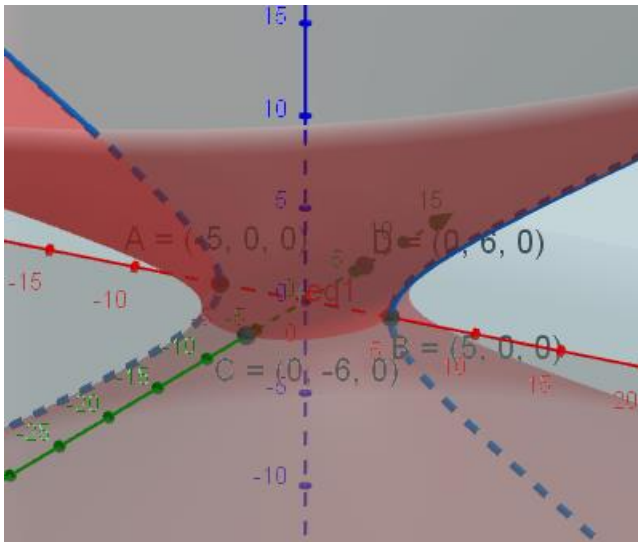
a) Traza sobre plano XZ .

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1$$

En XZ será $y = 0$, $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{0^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$$

Hipérbola con $a = 5$ m y $b = 3$ m Con eje focal en “x”



b) Traza sobre plano YZ .

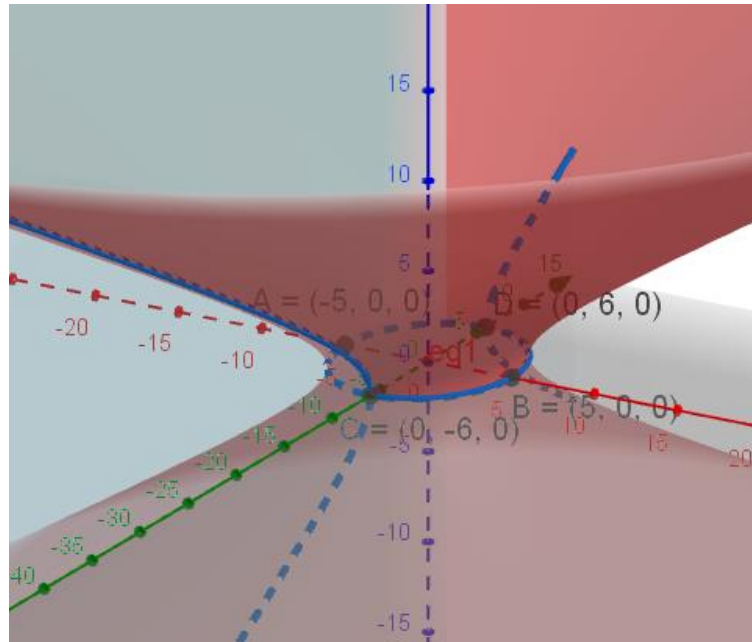
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{En YZ será } x = 0, \Rightarrow \frac{0^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$\Rightarrow$ Hipérbola con $a = 6$ m y $b = 3$ m Con eje focal en “y”

Traza sobre plano YZ
Hipérbola

Traza sobre plano XY
Elipse



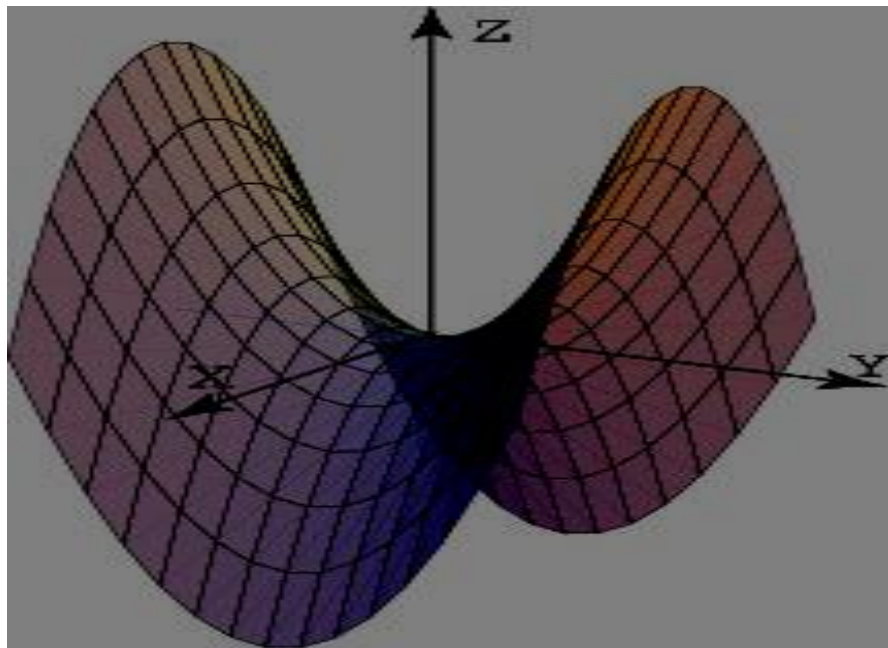
c) Traza sobre plano XY – Superficie.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{En XY será } z = 0, \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{0^2}{9} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow (\text{Elipse; } a = 6 \text{ m} \quad b = 5 \text{ m. con eje focal en "y"})$$

$$\text{Sup} = \pi \times a \times b = \pi \times 6\text{m} \times 5\text{m} = \mathbf{94,25 \text{ m}^2}$$

9- En la siguiente gráfica indique cuales ejes son intersectados por la superficie



<http://3.bp.blogspot.com/-yPZXhHRMCw0/TXU4yXN-I8I/AAAAAAAAACE/N4WuWoaTAbo/s1600/Paraboloide%2BHiperb%25C3%25B3lico.jpg>

Respuesta: Solo hay intersección con el eje z.

10- Paraboloide Hiperbólico. Ejercitación

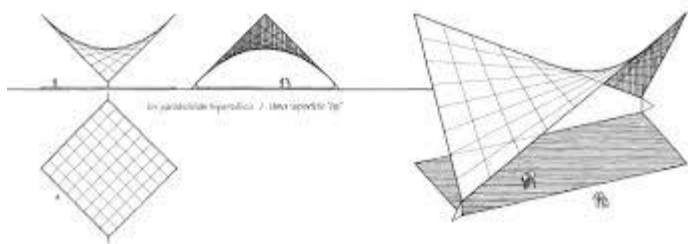


https://images.adsttc.com/media/images/5913/0fbd/e58e/ceea/f900/0083/newsletter/230317_-_Cura_Brochero_Arq_F_Ochoa_ph2_G_Viramonte-4855.jpg?1494421429

Esta Capilla dedicada al Cura Brochero, en la localidad de Cura Brochero en traslasierra Córdoba. Obra del arquitecto Federico Ochoa. Se asimila a una superficie cuádrica .

a) Indique el nombre de la misma y la ecuación canónica que le corresponde

b) Indique que forma toman sus trazas con cada plano cartesiano y planos paralelos a los mismos



https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSLnJku_v25KffZXqR6hqufWnuVIceqxCSxJ2T09OGbSru-JYtIHg

Respuesta:

a) Paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$

b) con planos paralelos a XY: hipérbolas
con el plano ZY y planos paralelos : parábolas
con el plano XZ y planos paralelos : parábolas