

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

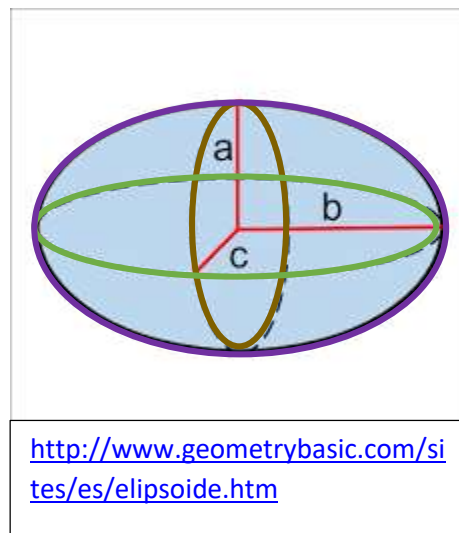
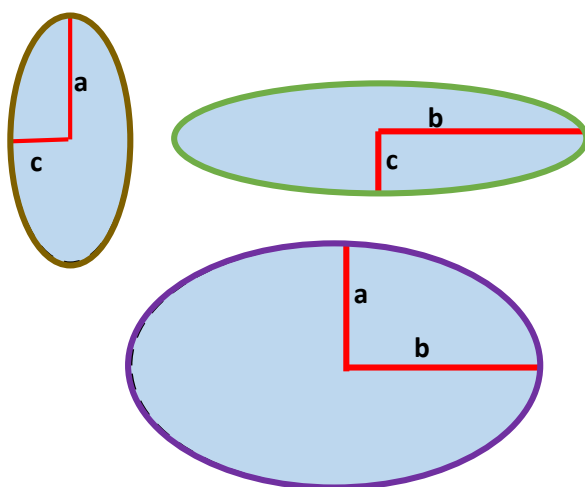
SUPERFICIES CUÁDRICAS:

Las superficies cuádricas son aquellas generadas por curvas cónicas. Esto quiere decir que tanto sus directrices como sus generatrices son cónicas. Podemos clasificarlas en superficies cuádricas cerradas y abiertas.

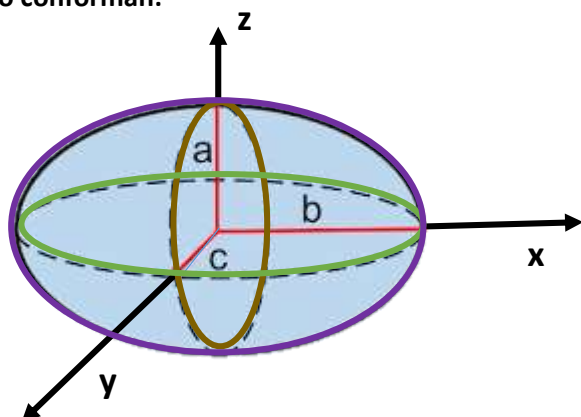
Comenzaremos estudiando las superficies cuádricas cerradas, que son aquellas que encierran una porción de espacio: elipsoide y superficie esférica.

LA ELIPSE Y EL ELIPSOIDE... LA SUPERFICIE ESFÉRICA Y LA CIRCUNFERENCIA.

Un **elipsoide** es una superficie curva y cerrada, cuyas tres secciones principales **ortogonales** entre si son **elípticas**.



Si asociamos la figura del elipsoide a un sistema de coordenadas ortogonales en el espacio podremos definir su ecuación, a partir de la determinación de las ecuaciones de las elipses que lo conforman:



$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$	$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
---	---	---

ECUACIÓN DEL ELIPSOIDE

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

Trazas del elipsoide:

Las trazas del elipsoide son las intersecciones de la superficie con los planos coordenados “xy” “xz” e “yz”.

Para encontrar esas intersecciones con los planos coordenados, vemos que los centros de todas las elipses tienen coordenadas O(0;0;0). Por otra parte, cuando estamos sobre el plano, por ejemplo, “xy” es claro que el valor de la coordenada “z” para cualquier punto del plano será igual a cero. Entonces:

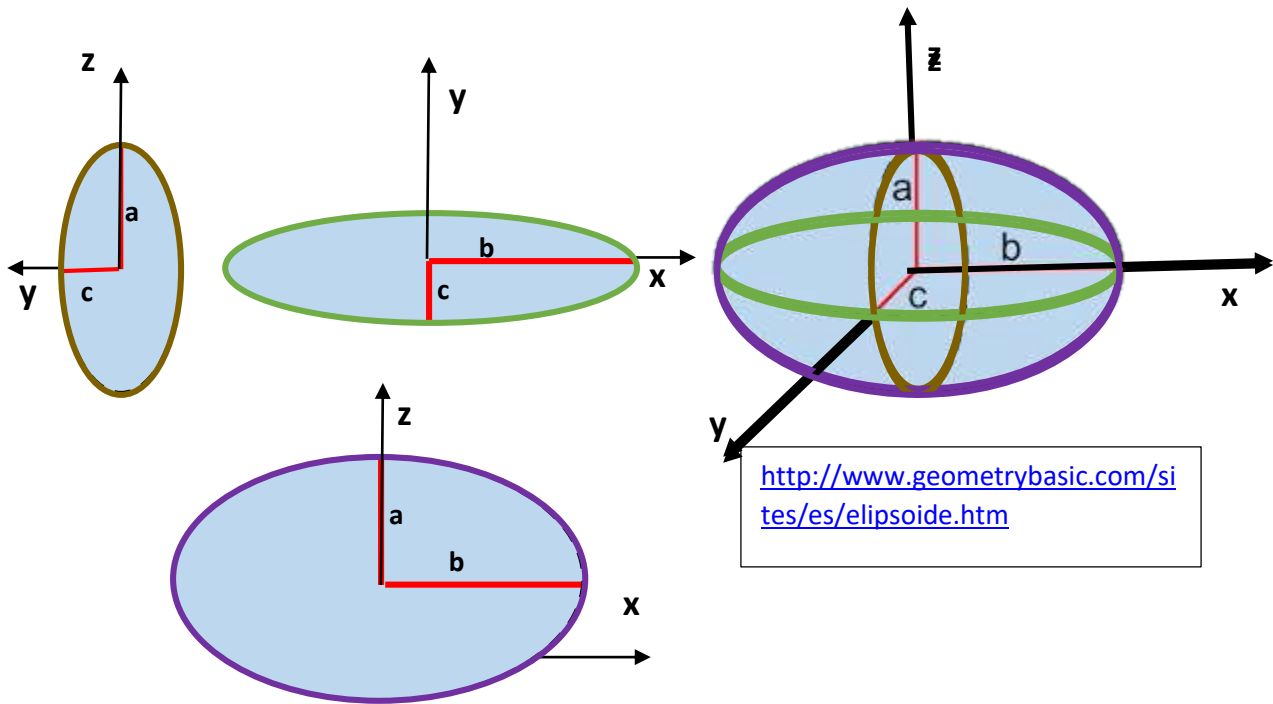
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

Si buscamos las intersecciones con los planos resulta:

Con plano “xy”	Coordenada z=0	Reemplazo en la ecuación del elipsoide: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{0^2}{a^2} = 1$ Cero dividido cualquier número es cero.	Y resulta de esta intersección la traza: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$
Con plano “xz”	Coordenada y=0	Reemplazo en la ecuación del elipsoide: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{0^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ Cero dividido cualquier número es cero.	Y resulta de esta intersección la traza: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$
Con plano “zy”	Coordenada x=0	Reemplazo en la ecuación del elipsoide: $\frac{0^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ Cero dividido cualquier número es cero.	Y resulta de esta intersección la traza: $\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$

Gráficamente estas elipses serían las trazas con los distintos planos coordenados.

CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS



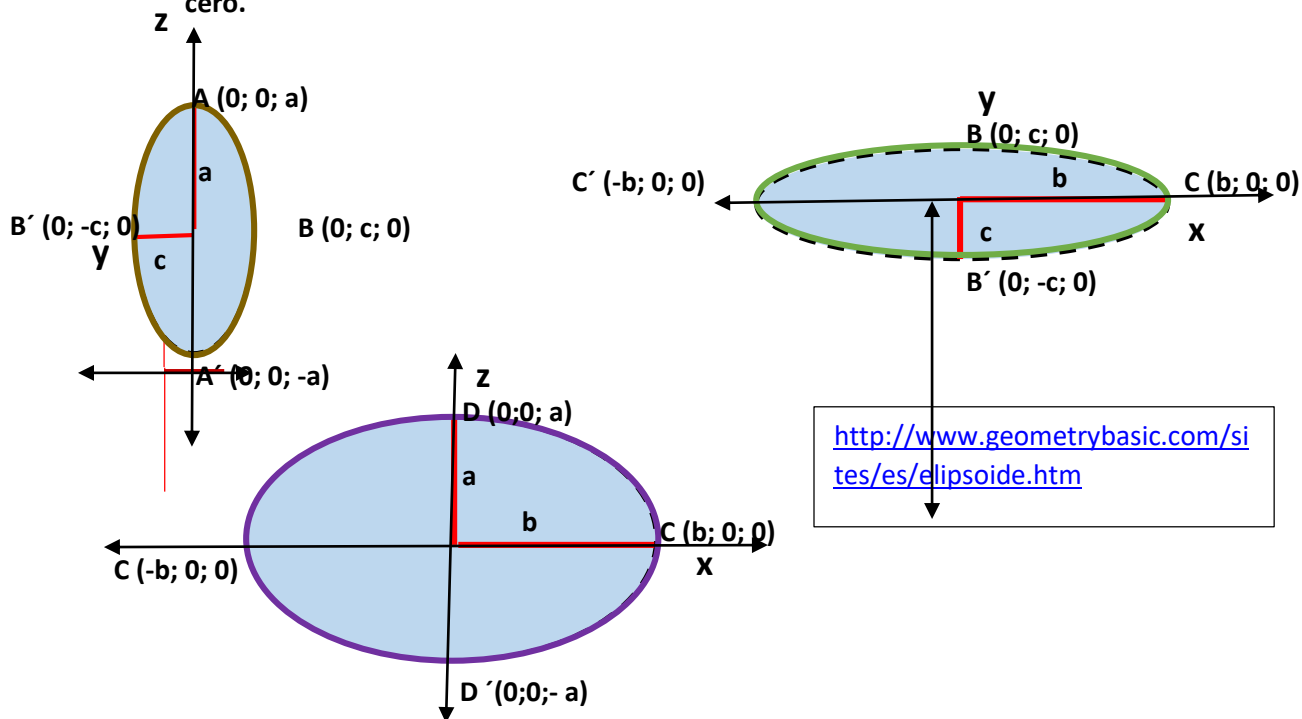
**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

Intersección del elipsoide con los distintos EJES coordenados

Intersección del elipsoide con el eje "x"	Dos puntos: Uno sobre semieje negativo Uno sobre semieje positivo	En este caso: $C(b; 0; 0)$ $C(-b; 0; 0)$
Intersección del elipsoide con el eje "y"	Dos puntos: Uno sobre semieje negativo Uno sobre semieje positivo	En este caso: $B(0; c; 0)$ $B(0; -c; 0)$
Intersección del elipsoide con el eje "z"	Dos puntos: Uno sobre semieje negativo Uno sobre semieje positivo	En este caso: $D(0;0; a)$ $D(0;0;-a)$

Ante todo debemos recordar que:

- Todos los puntos que se encuentran sobre el eje "X" tienen coordenadas "y" "z" igual a cero.
- Todos los puntos que se encuentran sobre el eje "y" tienen coordenadas "x" "z" igual a cero.
- Todos los puntos que se encuentran sobre el eje "z" tienen coordenadas "x" "y" igual a cero.



Queda claro entonces que cualquier elipsoide con centro en el origen del sistema coordenado tendrá seis

puntos de intersección con los mismos.

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

Algunas preguntas que nos llevan a definiciones importantes:

a- ¿Qué pasaría si dos de los denominadores de la ecuación del elipsoide fueran iguales entre sí?

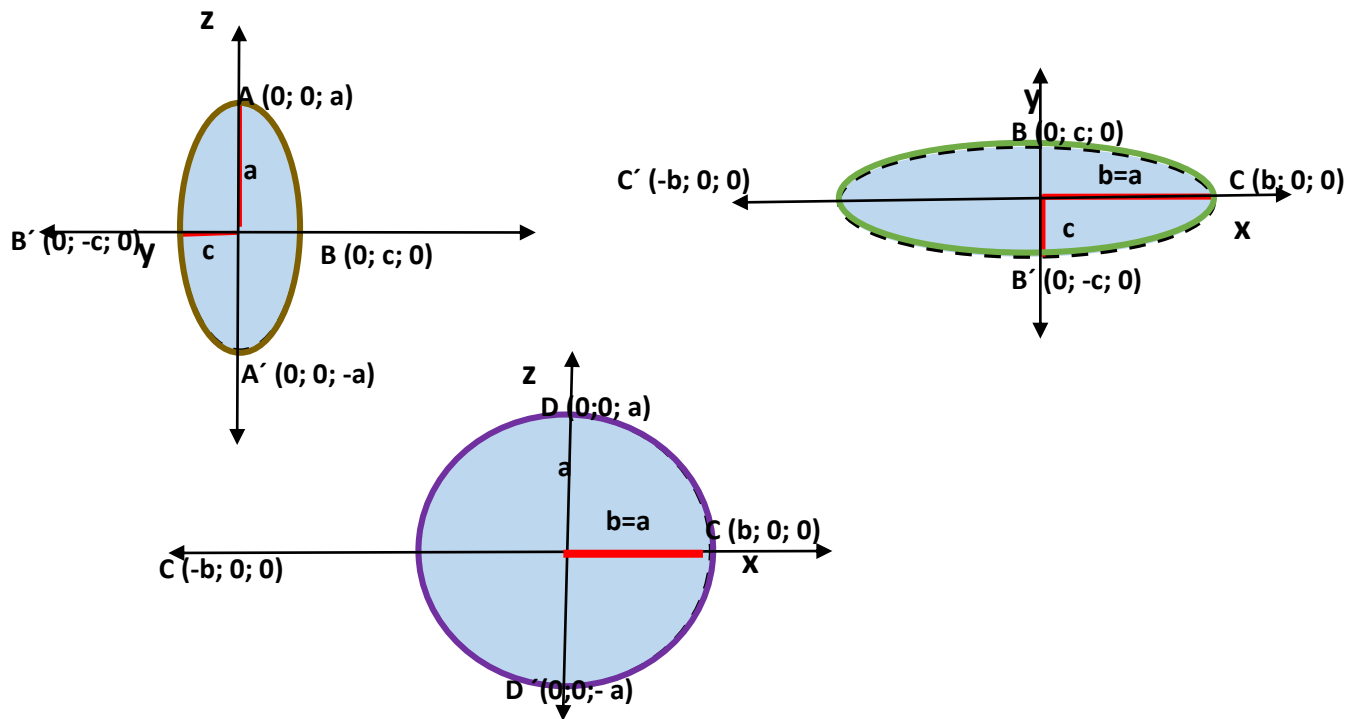
Por ejemplo, si $a=b$.

- $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ si $a=b$ puedo poner "a" en lugar de "b" en la ecuación

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ entonces resulta, analizando las trazas:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$	TRAZA XY	$a \neq c$ elipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	TRAZA XZ: $x^2 + z^2 = a^2$ Donde "a" es el radio	$a = a$ circunferencia
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	$\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	$a \neq c$ elipse

En este caso se dice que el elipsoide es de revolución ya que una de sus trazas es una circunferencia.



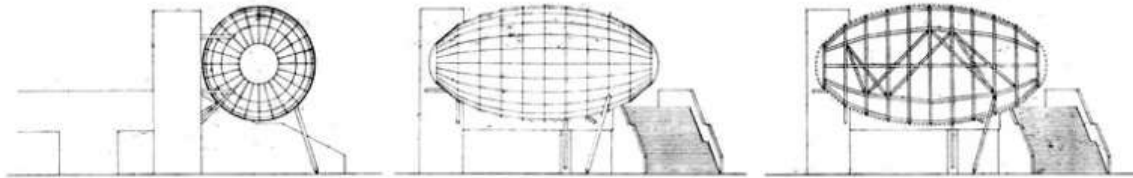
**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

Un ejemplo de la arquitectura:

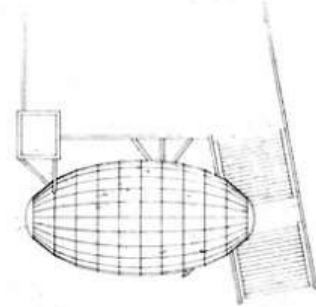
En la Puerta Urbana para Okawabata River City 21 conocida como el **Huevo de los vientos** construido en Tokio en 1991, [Toyo Ito](#) propone una especie de "casa del futuro" que es una "galería de video exterior".

Se trata de una estructura de una geometría ovalada -una forma recurrente en sus diseños en esa época- que contrasta con los volúmenes paralelepípedos de ángulos rectos de su entorno. Esta cápsula se halla fija a la pared, suspendida del suelo mediante patas metálicas, y da la impresión de estar flotando en el aire, especialmente desde un pequeño espacio público ubicado en la mezaninne.

https://www.urbipedia.org/hoja/Huevo_de_los_vientos



Huevo de los Vientos
EGG OF THE WINDS. Tsukudajima, Tokyo Bay, Japan, 1988/1991



**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

b- ¿Qué pasaría si todos los denominadores de la ecuación del elipsoide fueran iguales entre sí?

Por ejemplo, si $a=b=c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	TRAZA XY $x^2 + y^2 = a^2$ Donde "a" es el radio	a=a circunferencia
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	TRAZA XZ: $x^2 + z^2 = a^2$ Donde "a" es el radio	a=a circunferencia
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	TRAZA XZ: $y^2 + z^2 = a^2$ Donde "a" es el radio	a=a circunferencia

En este caso el elipsoide se convierte en una superficie esférica.



Technosphere, Dubai, en los Emiratos Árabes Unidos El diseño a cargo del estudio Law Cybertecture, se basó en el ecosistema del planeta tierra, y explora tecnologías sustentables para crear una comunidad neutra en carbono en una zona desértica. Es una edificación autosustentable, por lo cual genera energía a través de paneles solares y cuenta con sistemas de reciclaje de agua y terrazas con vegetación.

<https://www.paredro.com/6-construcciones-que-se-distinguen-por-sus-formas-esfericas/>

Preguntas y respuestas

¿Qué pasaría si quisiera calcular en el edificio de Dubai de la fotografía la superficie de los pisos que se encuentran a : nivel del suelo, a 50 metros del suelo y a 150m del suelo? El proyecto suponía que la altura sería de 500 metros, lo que nos dice que el radio de la superficie esférica es de 250 m.

La ecuación de la superficie esférica sería:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-j)^2 = \text{radio}^2$$

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

siendo (h;k;j) las coordenadas cartesianas del punto que es centro de la superficie esférica. En este caso el centro tiene coordenadas (0;0; 250) y la ecuación resulta:

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-250)^2=250^2$ resolviendo $(x)^2+(y)^2+(z-250)^2=250^2$ ECUACIÓN DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

Deberíamos ahora encontrar las ecuaciones de los planos paralelos al plano coordenado xy.

- a- Plano del suelo, coincide con el plano coordenado xy y la ecuación del plano xy es $z=0$ ya que todos los puntos que se encuentran sobre el plano xy tienen coordenada $z=0$ y eso caracteriza a este plano.
- b- Ecuación del plano que se encuentra a +50m sobre el plano de suelo o xy . Usando el mismo criterio vemos que será el plano de ecuación $z=+50$
- c- Finalmente el plano situado a +150 respecto del plano de nivel de suelo o xy será el plano de ecuación $z=+150$. Es importante notar que siempre se hace referencia al plano "xy" más allá de que este coincida o no con el plano de suelo cosa que en este caso particular ocurre.

Ahora lo lógico sería buscar las intersecciones entre los planos y la superficie esférica para así encontrar las superficies de los pisos o niveles que queremos conocer.

- a- La superficie a nivel suelo, solo se trata de reemplazar en las ecuaciones de la superficie esférica el valor de "z".

$$(x)^2+(y)^2+(z-250)^2=250^2$$

$$(x)^2+(y)^2+(0-250)^2=250^2$$

$$(x)^2+(y)^2+(250)^2-250^2=0$$

$$(x)^2+(y)^2=0$$
 Esta sería una circunferencia de radio igual a cero, es decir un punto.

- b- La superficie a +50m, solo se trata de reemplazar en las ecuaciones de la superficie esférica el valor de "z".

$$(x)^2+(y)^2+(50-250)^2=250^2$$

$$(x)^2+(y)^2+(-200)^2=250^2$$

$$(x)^2+(y)^2=-40.000+62.500$$

$$(x)^2+(y)^2=22.500$$
 radio será $\sqrt{22.500}=150m$ la superficie del piso será :

$$\pi x radio^2 = \pi x (150m)^2 = 70.685,83m^2$$

- c- La superficie a +150m, solo se trata de reemplazar en las ecuaciones de la superficie esférica el valor de "z".

$$(x)^2+(y)^2+(150-250)^2=250^2$$

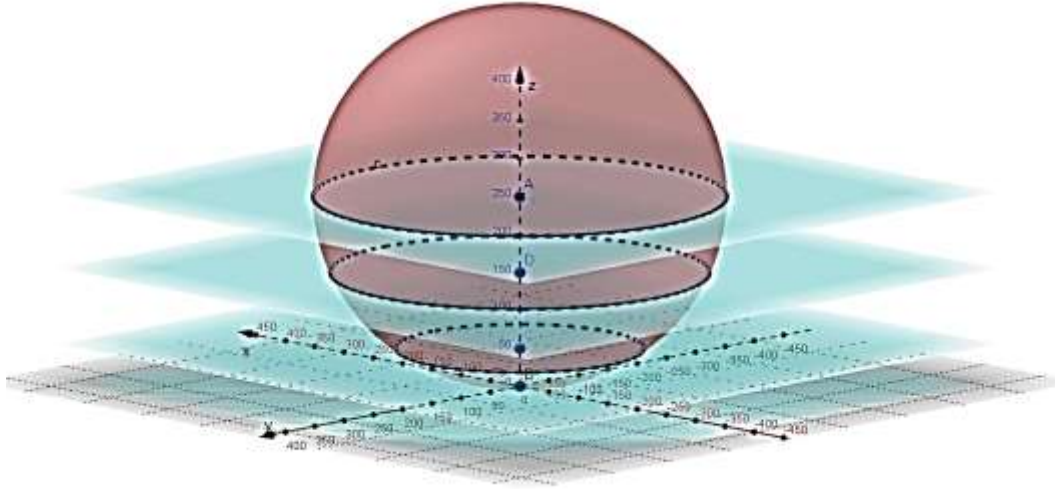
$$(x)^2+(y)^2+(-100)^2=250^2$$

$$(x)^2+(y)^2=-10.000+62.500$$

$$(x)^2+(y)^2=52.500$$
 radio será $\sqrt{52.500}=229,1288m$ la superficie del piso será :

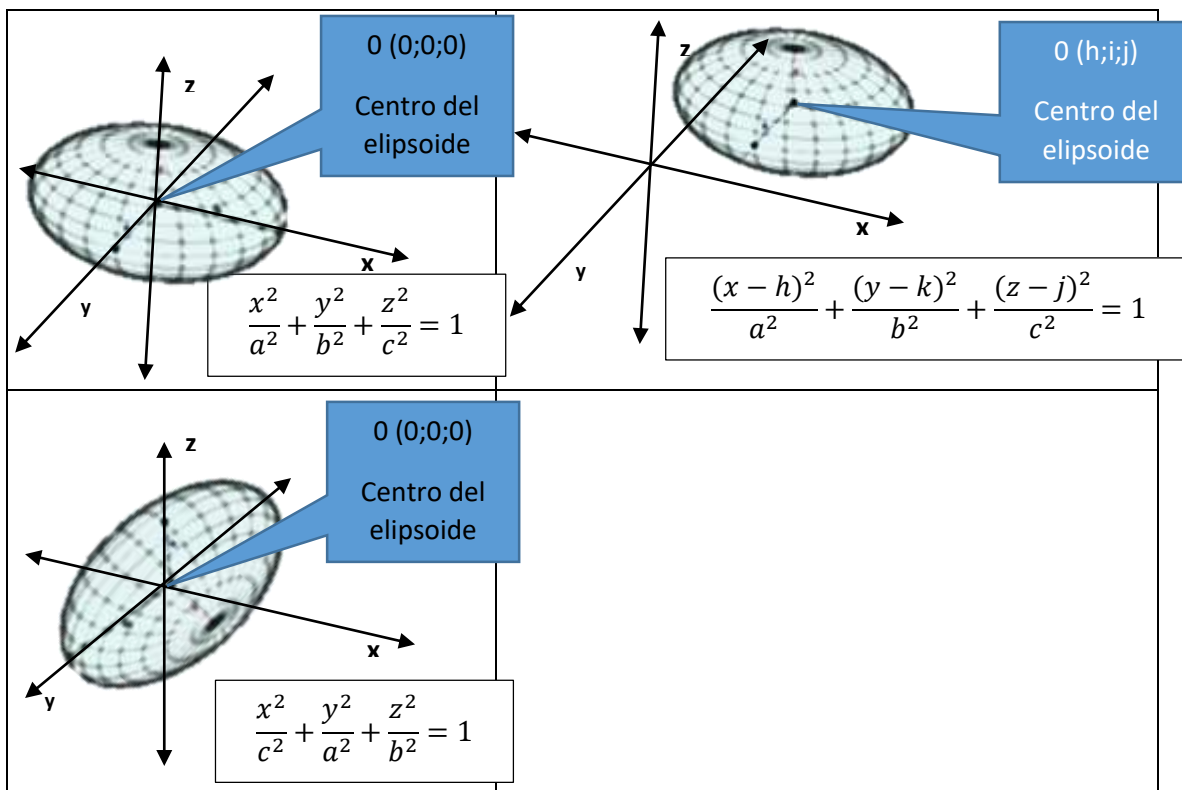
$$\pi x radio^2 = \pi x (229,1288m)^2 = 164.933,6143m^2$$

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**



**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

Otras posiciones posibles del elipsoide centrado en el origen y no.



**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

SUPERFICIES CUÁDRICAS ABIERTAS

Superficies cuádricas abiertas:

De la cónicas llamadas: Hipérbola , Circunferencia, Elipse (curvas en el plano) al hiperboloide de 1 y dos hojas (superficie cuádrlica en el espacio)

Supongamos que tenemos tres cónicas cuyos centros coinciden con el origen y que son trazas de un hiperboloide de 1 hoja:

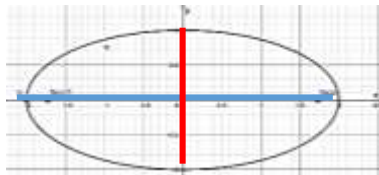
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ Esta ecuación corresponde a una elipse donde $a= 2$ y $b=1$

$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ Esta ecuación corresponde a una hipérbola donde $a= 2$ y $b=3$

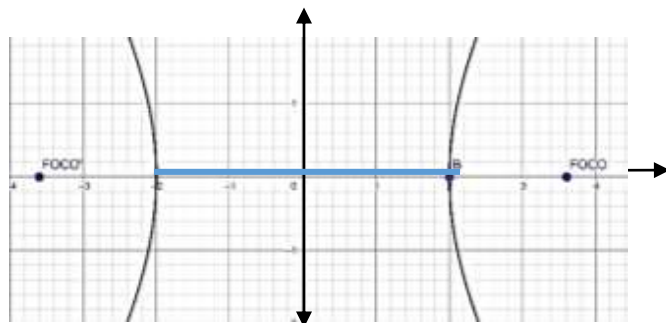
$\frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 1$ Esta ecuación corresponde a una hipérbola donde $a=1$ y $b= 3$

Recordemos que para obtener la ecuación de la superficie cuádrlica basta con agrupar estas tres ecuaciones en una sola sin repetir términos:

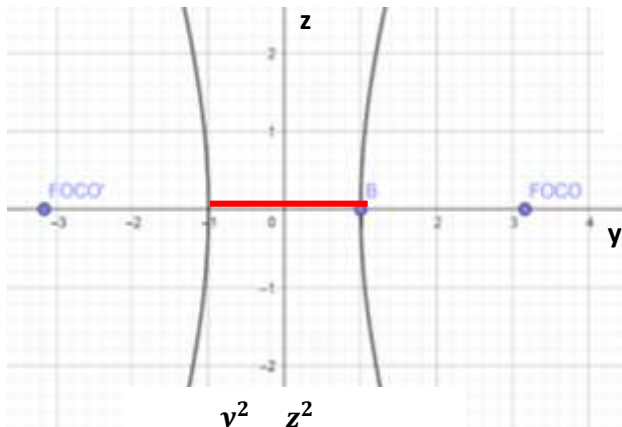
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 1$ Ecuación del hiperboloide de 1 hoja no reglado (Superficie cuádrlica)



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$



$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$



$$\frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 1$$

En el siguiente enlace verás la gráfica

oja:

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

<https://www.geogebra.org/m/s4Sr8vfE>

- **Veamos otro caso de un hiperboloide de una hoja:**

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ Esta ecuación corresponde a una elipse donde $a=2$ y $b=2$ es una circunferencia de radio $=2$

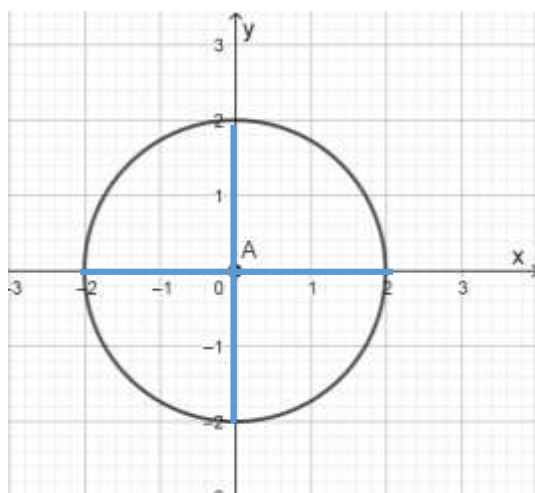
$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ Esta ecuación corresponde a una hipérbola donde $a=2$ y $b=3$

$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ Esta ecuación corresponde a una hipérbola donde $a=2$ y $b=3$

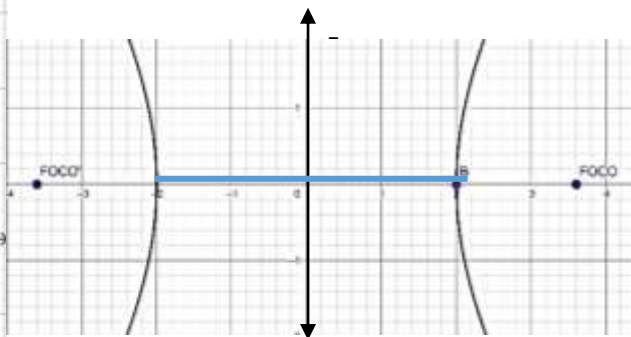
Recordemos que para obtener la ecuación de la superficie cuádrica basta con agrupar estas tres ecuaciones en una sola sin repetir términos:

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ Ecuación del hiperboloide de 1 hoja no reglado (Superficie cuádrica)

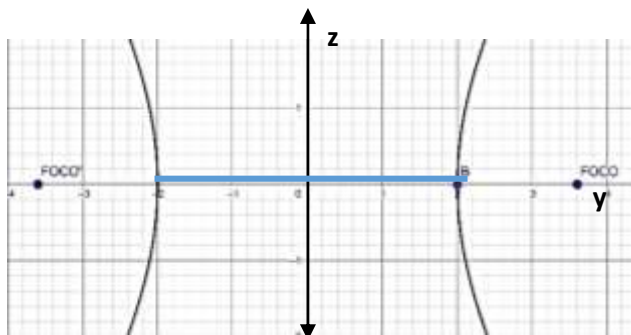
Si graficamos sus trazas:



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

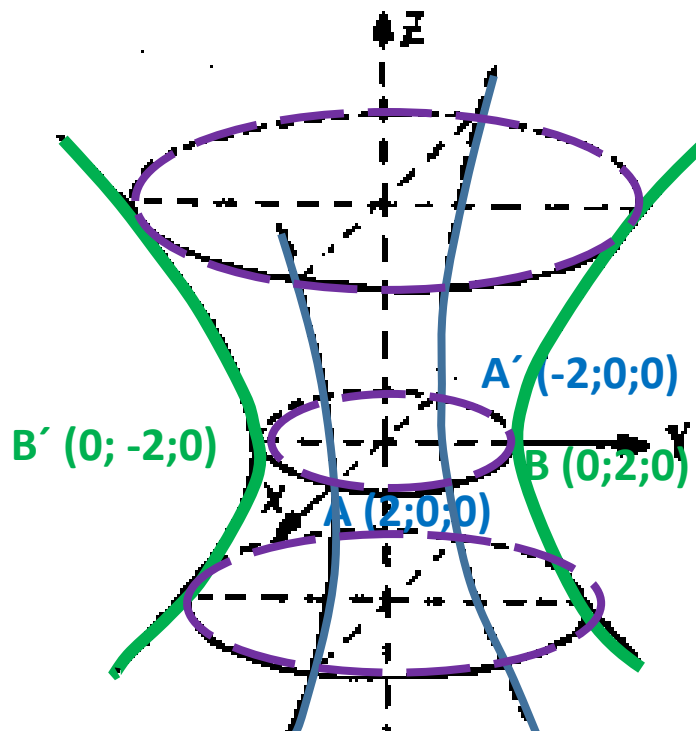


$$\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1$$



$$\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1$$

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**



Se trata de un hiperboloide de una hoja de revolución, que revoluciona o gira alrededor del eje “z”.

Eso se sabe porque una de sus trazas es una circunferencia.

Veremos ahora los puntos de intersección con los ejes coordenados:

- **Intersección con eje “x” hacemos $y=0$, $z=0$ en la ecuación del hiperboloide:**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$\frac{x^2}{4} = 1$ entonces $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ lo que indica dos puntos de intersección con eje “x” $A(2;0;0)$ y $A'(-2;0;0)$.

- **Intersección con eje “y” hacemos $x=0$, $z=0$ en la ecuación del hiperboloide:**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$\frac{y^2}{4} = 1$ entonces $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ lo que indica dos puntos de intersección con eje “y” $B(2;0;0)$ y $B'(-2;0;0)$.

- **Intersección con eje “z” hacemos $x=0$, $y=0$ en la ecuación del hiperboloide:**

- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

- $-\frac{z^2}{9} = 1$ despejo y resulta que $-z^2 = 9$ o bien que $z^2 = -9$ como no hay ningún número dentro del campo de los reales que al ser elevado al cuadrado me dé un número negativo esto significa que no hay punto de intersección con el eje “z” en este caso, y por lo tanto revoluciona o gira alrededor de este eje.

- Otros ejemplos resueltos que vos podés graficar:

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS**

RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS

1) Si las ecuaciones de los hiperboloides fueran:

$$1) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$2) \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$$

Ecuaciones	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$
Se pide:		
DETERMINA LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS "X" "Y" "Z"	A(2;0;0), A'(-2;0;0), con eje "Y" no hay intersección y C (0;0;3), C' (0;0;-3)	A(1;0;0), A'(-1;0;0), con eje "Y" no hay intersección y C (0;0;1), C' (0;0;-1)
DETERMINA LAS TRAZAS CON LOS PLANOS COORDENADOS	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ HIPÉRBOLA $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ ELIPSE $-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ HIPÉRBOLA	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$ hipérbola $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$ circunferencia $-\frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$ hipérbola
¿ES DE REVOLUCIÓN? SI LO ES, ¿ALREDEDOR DE QUE EJE GIRA?	NO HAY CIRCUNFERENCIA EN LAS TRAZAS NO ES DE REVOLUCIÓN	HAY CIRCUNFERENCIA EN LAS TRAZAS ES DE REVOLUCIÓN y revoluciona alrededor de "y"
DETERMINA LA SUPERFICIE QUE RESULTA DE LA INTERSECCIÓN DEL HIPERBOLOIDE CON UN PLANO DE ECUACIÓN: Y=4	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ $\frac{x^2}{4} - \frac{4^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ $\frac{x^2}{4} - 4 + \frac{z^2}{9} = 1$ $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 5$ DIVIDO AMBOS MIEMBROS POR 5 $\frac{x^2}{20} + \frac{z^2}{45} = 1$ ELIPSE SUP= $\pi x a x b = \pi x \sqrt{20} x \sqrt{45}$ = 94,2477m²	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$ $\frac{x^2}{1} - \frac{16}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$ $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 17$ Circunferencia de radio $+\sqrt{17}$ Superficie= $\pi x 17 = 53,4071m^2$
DETERMINA LA SUPERFICIE QUE RESULTA DE LA INTERSECCIÓN DEL HIPERBOLOIDE CON UN PLANO DE ECUACIÓN: Z=4	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{16}{9} = 1$ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -0,7777777$ DIVIDO AMBOS MIEMBROS POR -0,77777 $\frac{x^2}{-3,111} + \frac{y^2}{3,111} = 1$ Hipérbola no puedo definir superficie de la intersección	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$ $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{16}{1} = 1$ $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = -16$ DIVIDO AMBOS MIEMBROS POR -16 $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = +1$ Hipérbola no puedo definir superficie de la intersección porque la

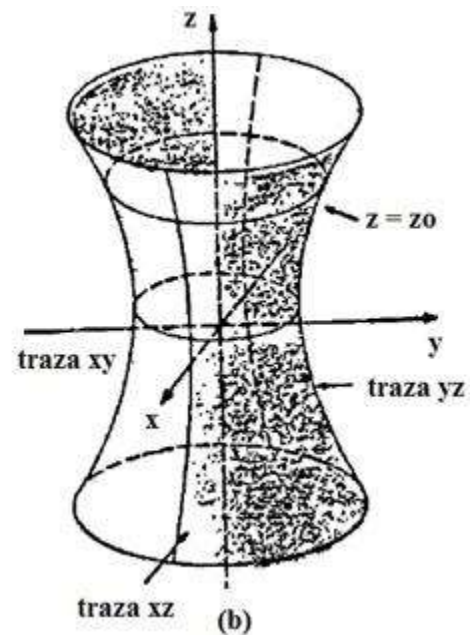
**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

	porque la hipérbola es una cónica abierta.	hipérbola es una cónica abierta.
--	---	-------------------------------------

RESUMEN DE HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

<i>Plano coordenado</i>	<i>Traza</i>
$xy (z = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$xz (y = 0)$	hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$yz (x = 0)$	hipérbola: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(a)



(b)

<https://sites.google.com/site/superficiescuadraticasycilin/conclusiones>

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

Ya vimos que el signo negativo en un término de la ecuación del hiperboloide de una hoja me indica que no hay intersección de la superficie con el eje que figura en ese término.

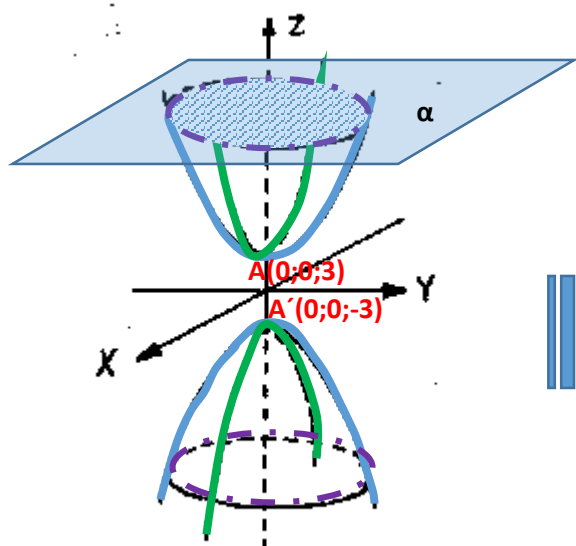
Entonces que ¿sucede si encuentro si encuentro una cuadrática de una superficie tal como esta?:

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

El termino el x^2 y término en z^2 se ven afectados por el signo negativo, por lo tanto, este hiperboloide será de dos hojas, y no cortará ni al eje "x" ni al eje "z" por las razones que ya explicamos anteriormente.

Intersección con eje "x"	$-\frac{x^2}{4} = 1$ No hay
Intersección con eje "y"	$-\frac{y^2}{4} = 1$ No hay)
Intersección con eje "z"	$+\frac{z^2}{9} = 1$ $A(0;0;3)$ $A'(0;0;-3)$

TRAZA SOBRE PLANO "XY"	$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ NO HAY
TRAZA SOBRE PLANO "XZ"	$-\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ HIPÉRBOLA
TRAZA SOBRE PLANO "YZ"	$-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ HIPERBOLA



La intersección con el plano α de cota 5 , paralelo al plano "xy", dará por resultado:

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

La ecuación del plano será $z = 5$

Reemplazamos en la ecuación del hiperboloide de dos hojas y resulta:

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{5^2}{9} &= 1 \\ -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{25}{9} &= 1 \\ -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} &= -1,777 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros por (- 4)

$$x^2 + y^2 = 7,1108$$

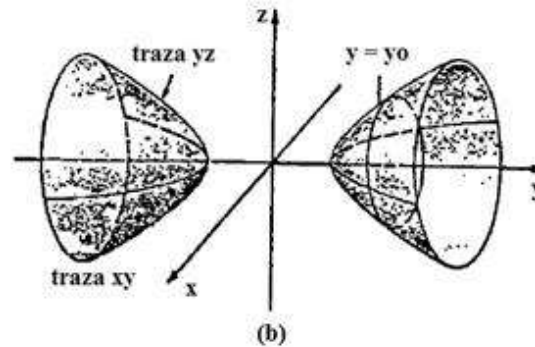
Ecuación de una circunferencia de radio $= +\sqrt{7,1108}$

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

RESUMEN HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS:

<i>Plano coordenado</i>	<i>Traza</i>
$xy (z = 0)$	hipérbola: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$xz (y = 0)$	ninguna
$yz (x = 0)$	hipérbola: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(a)

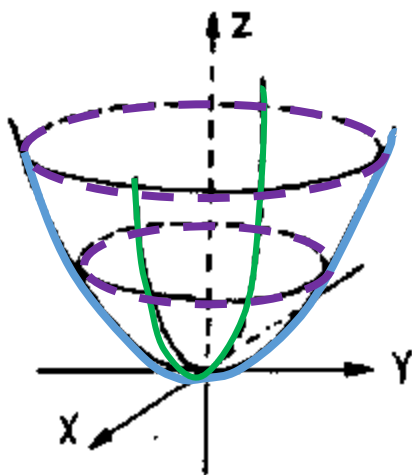


(b)

<https://sites.google.com/site/superficiescuadraticasycilin/conclusiones>

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

PARABOLOIDE ELÍPTICO



La ecuación del paraboloide elíptico

es:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cZ$$

Las trazas sobre planos paralelos al plano coordenado "xy" serán elipses

elíptico será:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cZ$$

Las trazas sobre planos paralelos al plano coordenado "xy" serán circunferencias

	Análisis de la ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cZ$ en el espacio	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cZ$ en el espacio Donde a,b y c son números y "x" "y" "z" variables.
	INTERSECCIÓN CON EJE X	Para y=0 , z=0 $\frac{x^2}{a^2} = cZ \quad x^2 = a^2 c c x 0 \quad x^2 = 0 \quad x=0 \quad \text{O}(0;0;0)$
	INTERSECCIÓN CON EJE Y	Para x=0 , z=0 $\frac{y^2}{b^2} = cZ \quad y^2 = b^2 c c x 0 \quad y^2 = 0 \quad y=0 \quad \text{O}(0;0;0)$
	INTERSECCIÓN CON EJE Z	Para x=0 , y=0 $0 = cZ \quad \frac{0}{c} = Z \quad Z = 0 \quad \text{O}(0;0;0)$
	INTERSECCIÓN CON PLANO XY	punto

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

	INTERSECCIÓN CON PLANO XZ	parabola
	INTERSECCIÓN CON PLANO YZ	parabola
	INTERSECCIÓN CON PLANO PARALELO AL XY DE ECUACIÓN Z= 4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^4$ Si otorgamos valores, por ejemplo a=2, b=1, c=3 podemos resolver numéricamente la ecuación: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 3^4$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 12 \text{ dividiendo ambos miembros por 12}$ $\frac{x^2}{4 \times 12} + \frac{y^2}{1 \times 12} = \frac{12}{12}$ $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1$ La intersección del paraboloide elíptico con el plano de ecuación z=4, para los valores asignados de a,b y c es una elipse de a=+√48 ; b= +√12

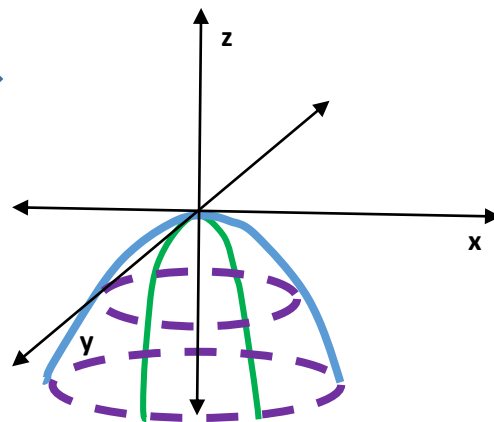
	Análisis de la ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz$ en el espacio	
	INTERSECCIÓN CON EJE X	Para y=0 , z=0 $\frac{x^2}{a^2} = cz$ $x^2 = a^2xcx0$ $x^2 = 0$ $x=0$ O(0;0;0)
	INTERSECCIÓN CON EJE Y	Para x=0 , z=0 $\frac{y^2}{a^2} = cz$ $x^2 = a^2xcx0$ $y^2 = 0$ $y=0$ O(0;0;0)

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

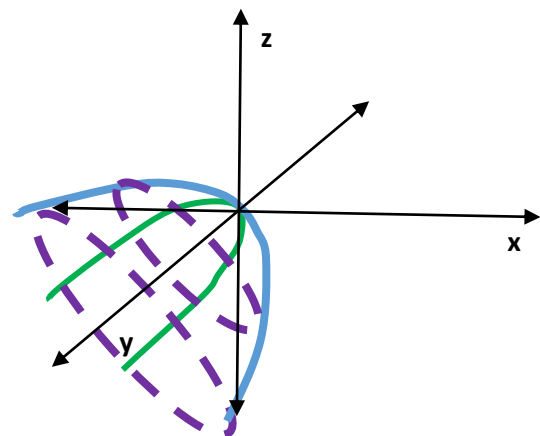
	INTERSECCIÓN CON EJE Z	Para $x=0, y=0$ $0 = cz$ $\frac{0}{c} = z$ $z = 0$ $O(0;0;0)$
	INTERSECCIÓN CON PLANOS COORDENADOS	NO HAY
	INTERSECCIÓN CON PLANO PARALELO AL XY DE ECUACIÓN $Z= 4$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = c4$ Si otorgamos valores, por ejemplo $a=2, c=3$ podemos resolver numéricamente la ecuación: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} = 3 \cdot 4 \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 12$ Multiplicando ambos miembros por 4 resulta: $x^2 + y^2 = 48$ la ecuación de una circunferencia de radio $+\sqrt{48}$. Esta circunferencia es la traza o intersección de la cuádrica con el plano de ecuación $z=4$

Otras posiciones posibles:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -cZ$$

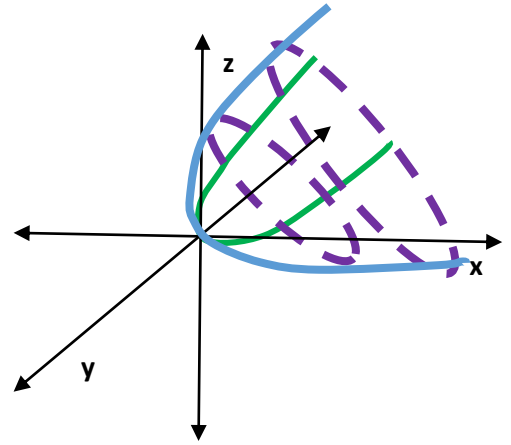


$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +cy$$

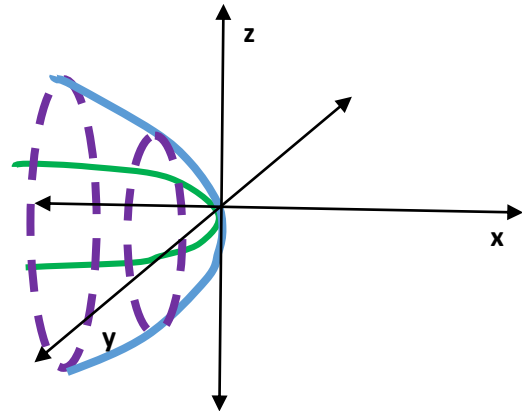


**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = -cy$$



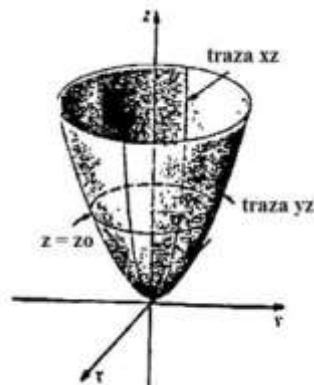
$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -cx$$



RESUMEN:

Plano coordenado	Traza
• $xy (z = 0)$	punto: $(0, 0)$
$xz (y = 0)$	parábola: $\frac{x^2}{a^2} = cz$
$yz (x = 0)$	parábola: $\frac{y^2}{b^2} = cz$

(a)

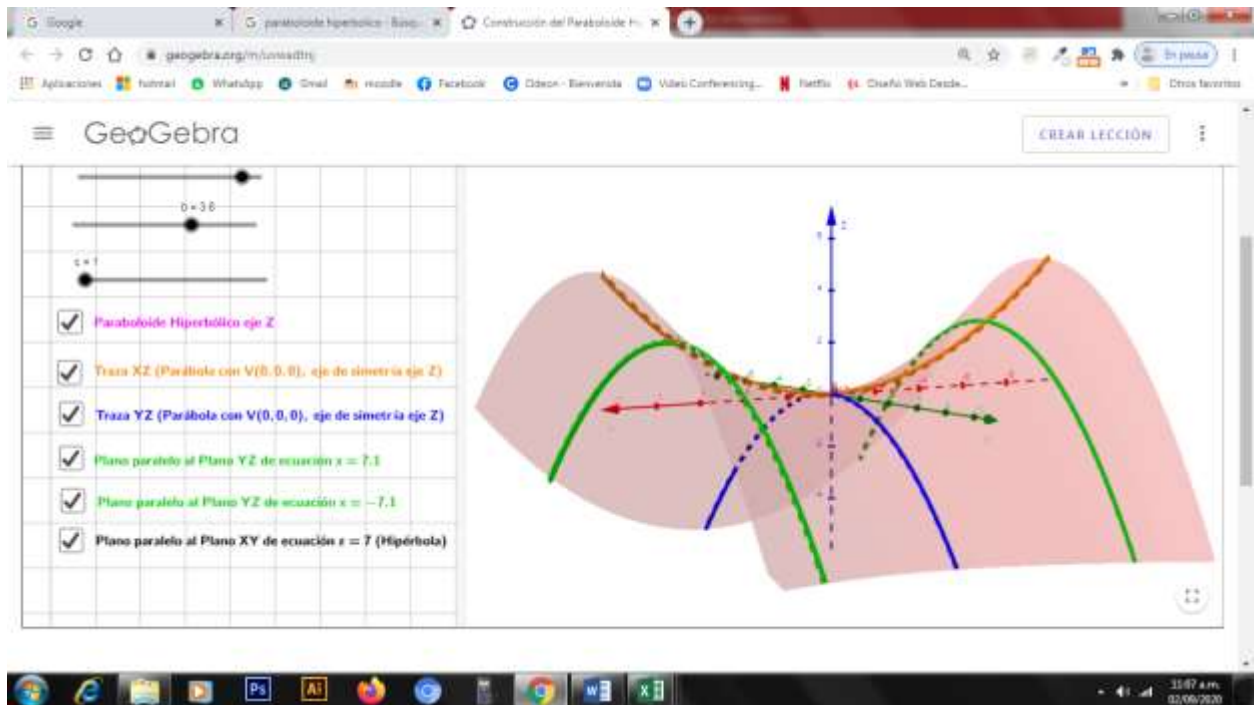


(b)

<https://sites.google.com/site/superficiescuadraticasycilin/conclusiones>

**CUÁDRICAS CERRADAS Y ABIERTAS- TRAZAS- INTERSECCIONES CON EJES , PLANOS
COORDENADOS Y PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS
RELACIÓN ENTRE CÚADRICAS Y CÓNICAS**

PARABOLOIDE HIPERBOLICO

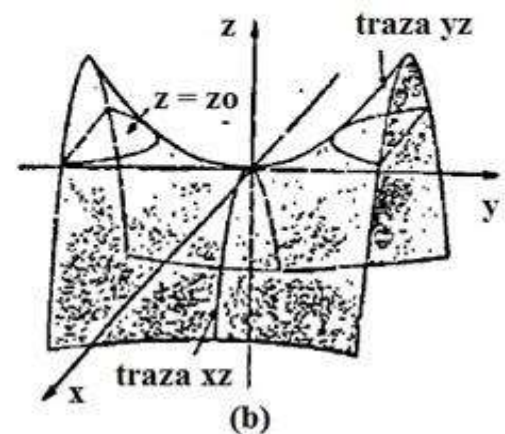


<https://www.geogebra.org/m/uvwadtnj>

Grafico interactivo

Plano coordenado	Traza
$xy (z = 0)$	rectas: $y = \pm \frac{a}{b}x$
$xz (y = 0)$	parábola: $-\frac{x^2}{b^2} = cz$
$yz (x = 0)$	parábola: $\frac{y^2}{a^2} = cz$

(a)



(b)

<https://sites.google.com/site/superficiescuadraticasycilin/conclusiones>