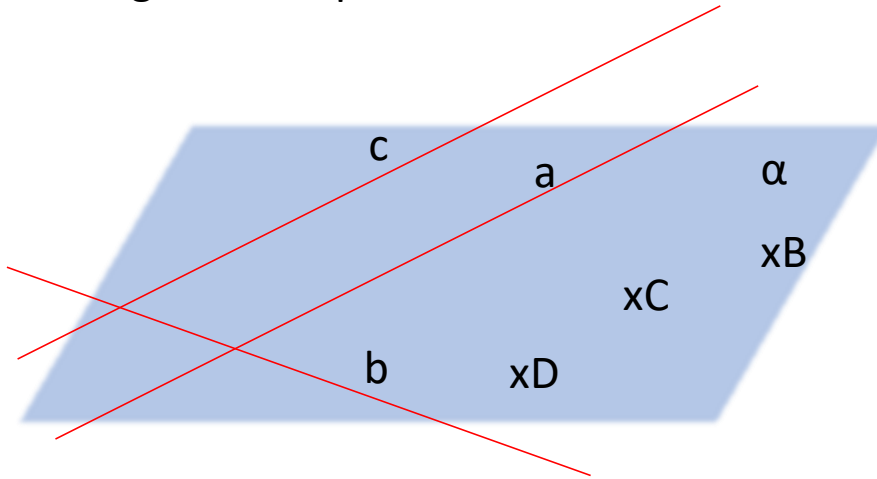


Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

El plano es el elemento ideal que solo posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas, se representan con una letra griega ubicada en una de las esquinas. Los planos son infinitos pero se los representa con figuras geométricas finitas, generalmente rectángulos o trapecios.



Un plano se puede definir de las siguientes maneras:

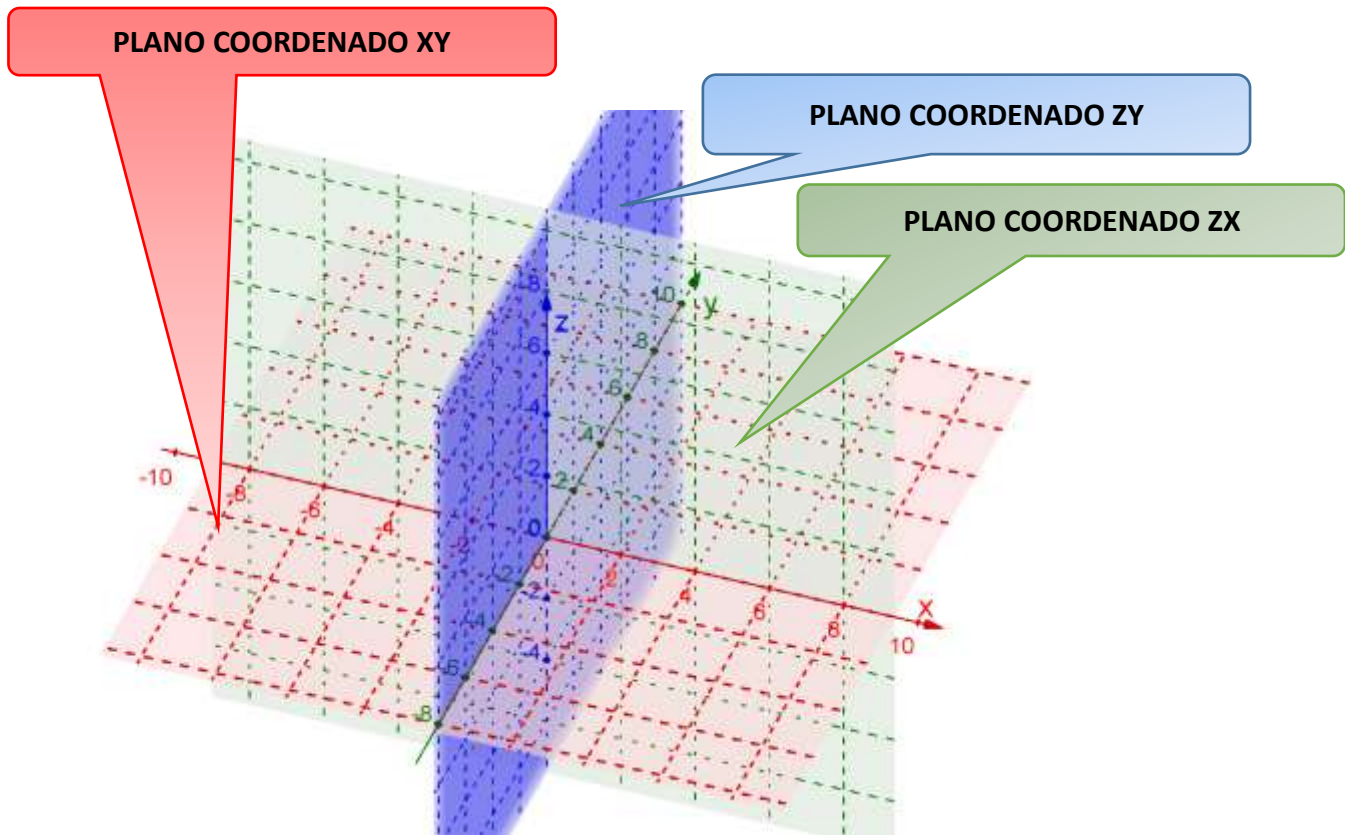
- Tres puntos no alineados. (Por ejemplo B,C yD)
- Una recta y un punto exterior a ella.(Por ejemplo recta “a” y punto B)
- Dos rectas paralelas o dos rectas que se cortan. (Por ejemplo “a” y “c” o bien “c” y “b”).)

Ejemplos dentro del campo de la Arquitectura:

- Un muro
- Una losa
- Una cubierta de techo
- Todo objeto donde dos de sus dimensiones primen sobre la tercera, haciendo que esta pueda ser considerada como despreciable comparada con las otras dos.

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

LOS PLANOS COORDENADOS



RECORDEMOS:

- Los planos coordenados son tres.
- Son perpendiculares entre sí.
- Sus intersecciones dan origen a rectas que son los ejes coordenados "x", "y" "z"
- El punto de intersección de los tres ejes coordenados es el punto de coordenadas (0;0;0).
- Todos los puntos que se encuentran sobre el plano "xy" tienen cota cero.
- Todos los puntos que se encuentran sobre el plano "xz" tienen ordenada cero
- Todos los puntos que se encuentran sobre el plano "zy" tienen abscisa cero

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

- Los puntos que se ubican sobre el eje coordenado “x” tienen coordenadas cero en “z” y en “y”.
- Los puntos que se ubican sobre el eje coordenado “y” tienen coordenadas cero en “x” y en “z”.
- Los puntos que se ubican sobre el eje coordenado “z” tienen coordenadas cero en “x” y en “y”.

AHORA VAMOS A VER LAS ECUACIONES DE ESTOS PLANOS, ENTENDIENDO QUE LAS ECUACIONES SON COMO LAS CARACTERÍSTICAS QUE ME PERMITEN DIFERENCIAR UN LUGAR GEOMÉTRICO DE OTRO.

OBSERVEN LA FIGURA DEL PLANO COORDENADO “XY” POR EJEMPLO Y VEAMOS COMO PODEMOS DEFINIRLO:

¿QUE TIENEN DE PARTICULAR TODOS LOS PUNTOS QUE ESTAN SOBRE ESTE PLANO?

- Todos los puntos que se encuentran sobre el plano “xy” tienen cota cero.

Luego la ecuación del plano coordenado “xy” será en un sistema coordenado tridimensional: $z=0$

Queda a tu cargo determinar las ecuaciones de los otros dos planos coordenados.

¿Qué ocurre si queremos determinar la ecuación de un plano cualquiera que no sea uno de los planos coordenados?

Nos proponemos hallar la ecuación del plano δ que contiene al punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y es perpendicular al vector $u=[A; B; C]$ (1) donde A , B y C son las componentes del vector, no las coordenadas de un punto. (Recuerda que un vector es un segmento dirigido que tiene: módulo, dirección, sentido y punto de aplicación).

Para definir la ecuación debemos definir:

- ¿Qué condición deberá cumplir un punto $P(x; y; z)$ para pertenecer al plano δ ?
- Cuando trazamos el vector P_0P , debemos tener en cuenta que éste debe pertenecer al plano, y ser por lo tanto, perpendicular al vector normal al plano $u[A; B; C]$

$P(x; y; z)$ $P_0(x_0; y_0; z_0)$ son los extremos del vector que se encuentra en el plano δ y que es perpendicular al vector u

Vector $PP_0 = (x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ (2) donde $(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ son las componentes del vector, no las coordenadas de un punto

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

- Para verificar que el vector $\overrightarrow{PP_0}$ cumpla con la condición de ser perpendicular al plano δ basta con que el producto escalar entre $\overrightarrow{PP_0}$ y $\mathbf{u}$ sea igual a cero.¹

Entonces, reemplazando por las expresiones:

$\mathbf{u}=[A;B;C]$ (1). y Vector $\overrightarrow{PP_0} = (x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ (2) resulta:

$$(x-x_0; y-y_0; z-z_0) \cdot (A;B;C) = 0$$

$$\text{multiplicando } (x-x_0)A + (y-y_0)B + (z-z_0)C = 0$$

distribuyendo:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

Llamando al contenido del paréntesis:

$$+(-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = D$$

RESULTA :

$Ax + By + Cz + D = 0$ La ecuación cartesiana del plano

- Donde A, B y C son los números de dirección de una recta perpendicular al plano
- X, Y, y Z son las coordenadas de un punto cualquiera que pertenece al plano
- D es una constante que me indica a que distancia se encuentra el plano del origen del sistema coordenado.

Para que esto quede claro veamos un ejemplo:

Sea un punto M de coordenadas $(-1;4;3)$ y “v” un vector perpendicular al plano cuyas componentes son $v [4;3;-1]$. Determina la ecuación del plano y su gráfica.

- Tomamos la ecuación cartesiana del plano como modelo

$Ax + By + Cz + D = 0$

- Reemplazamos los valores que nos dan como datos:
- $A= 4$ $B=3$ $C= -1$ componentes del vector “v” perpendicular al plano del que queremos conocer la ecuación.
- $X= -1$ $Y= 4$ $Z= 3$ coordenadas de un punto cualquiera del plano.
- Reemplazamos en la ecuación cartesiana del plano:

¹ **Producto Escalar:** el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman entre ellos.

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

$$4x + 3y - 1z + D = 0$$

Pero cuánto vale “D”? De no definir este valor la ecuación no estará completa.

Entonces para obtener D puedo reemplazar los valores “x” “y” y “z” de la ecuación por los de un punto que pertenezca al plano.

$$4 \cdot (-1) + 3 \cdot (4) + (-1) \cdot (3) + D = 0$$

$$-4 + 12 - 3 = -D$$

$$5 = -D$$

$$-5 = D$$

La ecuación pedida será entonces: $4x + 3y - 1z - 5 = 0$

Y cuáles serán los puntos de intersección de este plano con los ejes coordenados?

- La manera de encontrarlos es la de siempre:
 1. Por ejemplo, si queremos encontrar la intersección con el eje “X” sabemos que todos los puntos que se encuentran sobre el mismo tienen coordenada $y=0$ y coordenada $z=0$, reemplazando esas coordenadas en la ecuación del plano podemos conocer la coordenada faltante “x” del punto de intersección:
$$4x + 3y - 1z - 5 = 0$$
$$4x + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 5 = 0$$
$$4x = 5 \text{ despejando } x = 5/4 = 1,25$$
El punto de intersección con el eje coordenado “X” será entonces $M(1,25;0;0)$
 2. Si queremos encontrar la intersección con el eje “Y” sabemos que todos los puntos que se encuentran sobre el mismo tienen coordenada $x=0$ y coordenada $z=0$, reemplazando esas coordenadas en la ecuación del plano podemos conocer la coordenada faltante “y” del punto de intersección:

$$4x + 3y - 1z - 5 = 0$$

$$4 \cdot 0 + 3y - 1 \cdot 0 - 5 = 0$$

$$3y = 5 \text{ despejando } y = 5/3 = 1,67$$

El punto de intersección con el eje coordenado “Y” será entonces $L(0;1,67;0)$

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

3. Si queremos encontrar la intersección con el eje “Z” sabemos que todos los puntos que se encuentran sobre el mismo tienen coordenada $x=0$ y coordenada $y=0$, reemplazando esas coordenadas en la ecuación del plano podemos conocer la coordenada faltante “z” del punto de intersección:

$$4x + 3y - 1z - 5 = 0$$

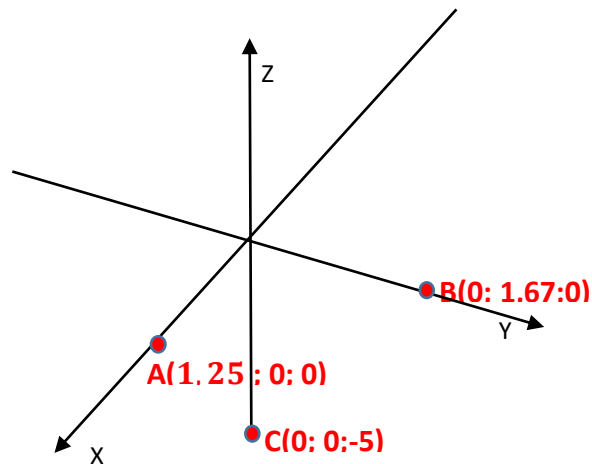
$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1z - 5 = 0$$

$$-1z = 5 \quad \text{despejando} \quad z = 5/(-1) = -5$$

El punto de intersección con el eje coordenado “Z” será entonces
 $Q(0;0;-5)$

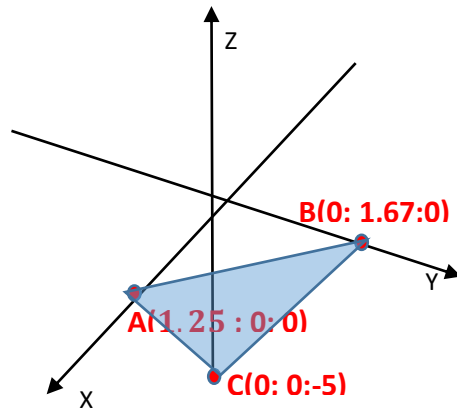
COMO LO GRAFICAMOS ENTONCES?

- En primer lugar graficamos las intersecciones del plano con los ejes.

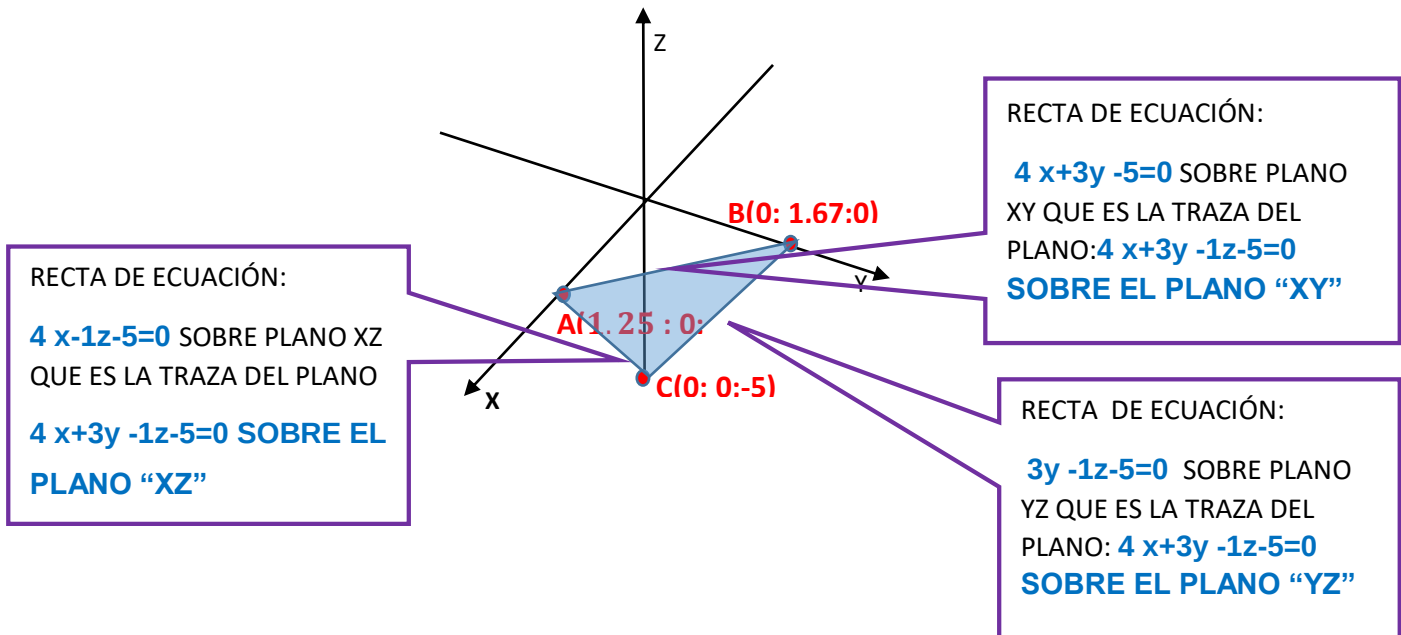


- Luego unimos los puntos con segmentos de recta

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano



- Así quedan definidas las trazas sobre los planos coordenados:



Estas ecuaciones de las trazas pueden obtenerse de manera analítica de la siguiente manera:

- Primero analizar que sucede con todos los puntos que se encuentran sobre el plano "XY" y pensar cual es la coordenada "z" de todos ellos. Evidentemente será cero porque están sobre el plano. Entonces para encontrar la traza sobre el plano XY hacemos cero la coordenada z en la ecuación del plano.

$$4x + 3y - 1z - 5 = 0 \text{ para } z=0 \text{ la traza sobre el plano XY resulta } 4x + 3y - 5 = 0$$

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

- Segundo analizar que sucede con todos los puntos que se encuentran sobre el plano "XZ" y pensar cual es la coordenada "y" de todos ellos. Evidentemente
- será cero porque están sobre el plano. Entonces para encontrar la traza sobre el plano XZ hacemos cero la coordenada y en la ecuación del plano.

$4x + 3y - 1z - 5 = 0$ para $y=0$ la traza sobre el plano XZ resulta $4x - 1z - 5 = 0$

- Tercero analizar que sucede con todos los puntos que se encuentran sobre el plano "YZ" y pensar cual es la coordenada "x" de todos ellos. Evidentemente será cero porque están sobre el plano. Entonces para encontrar la traza sobre el plano YZ hacemos cero la coordenada x en la ecuación del plano.

$4x + 3y - 1z - 5 = 0$ para $x=0$ la traza sobre el plano YZ resulta $3y - 1z - 5 = 0$

Ecuación del plano	$4x + 3y - 1z - 5 = 0$			
Intersección con ejes coordenados		Con eje "x" $A(1,25 ; 0; 0)$	Con eje "y" $B(0; 1,67; 0)$	Con eje "z" $C(0; 0; -5)$
Intersección con planos coordenados		Con plano "XY" $4x + 3y - 5 = 0$	Con plano "XZ" $4x - 1z - 5 = 0$	Con plano "YZ" $3y - 1z - 5 = 0$

Resumiendo:

Que sucede si la ecuación del plano se encuentra incompleta?

1. $4x + 3y - 5 = 0$ En este caso falta el término que involucra a la variable z

- Puntos de intersección del plano con los ejes coordenados

a- Con eje "X" hago $y=0$ $z=0$ y resulta $4x + 3*0 - 5 = 0$

$4x = 5$ $x = 5/4$ punto de intersección M $(1,25; 0; 0)$

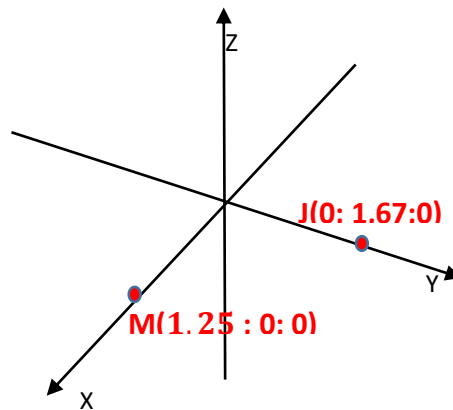
b- Con eje "Y" hago $x=0$ $z=0$ y resulta $4*0 + 3y - 5 = 0$

$3y = 5$ $y = 5/3$ punto de intersección J $(0; 1,67; 0)$

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

c- Con eje "Z" no hay intersección alguna porque no está en la ecuación lo que significa que el plano es paralelo al eje "Z", porque solo siendo paralelos puede darse que nunca se intersequen.

d- Graficando:



Intersecciones del plano $4x+3y-5=0$ con los planos coordenados

a- Intersección con el plano coordenado "XY" hago que $z=0$, como "z" no está en la ecuación la traza será directamente: $4x+3y-5=0$

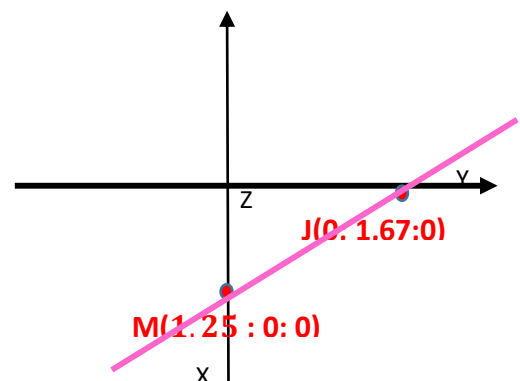
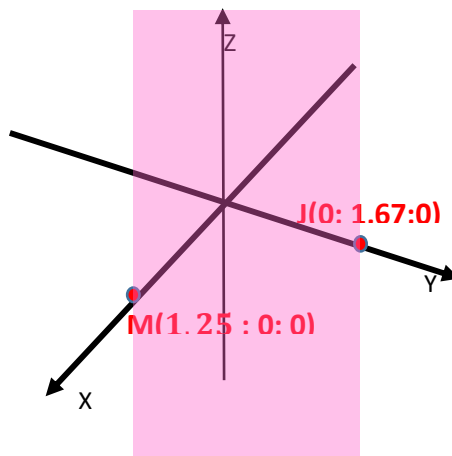
b- Intersección con el plano coordenado "XZ" hago que $y=0$ y resulta:

$4x-5=0$ resulta que la traza es $x=5/4$ una recta que pasa por el punto M (1,25;0;0) y es perpendicular al eje "X"

c- Intersección con el plano coordenado "YZ" hago que $X=0$ y resulta:

$3y-5=0$ resulta que la traza es $y=5/3$ una recta que pasa por el punto J (0;1,67;0) y es perpendicular al eje "Y"

Grafiquemos entonces:



Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

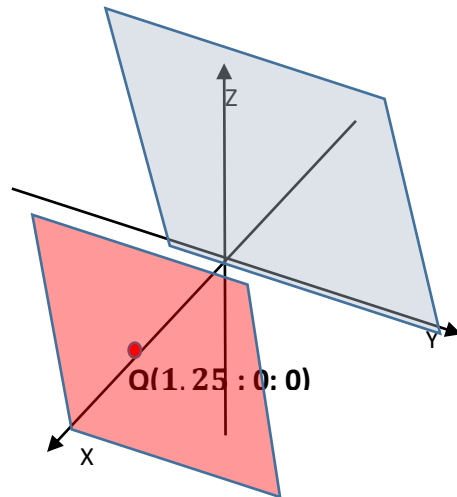
Y QUE SUCEDE SI FALTAN DOS TÉRMINOS EN LA ECUACIÓN???

Por ejemplo si la ecuación se reduce solo a esto: $4x - 5 = 0$

INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS

- a- Intersección con eje X= 5/4 Q (1,25;0;0)
- b- Intersección con eje Y, no hay
- c- Intersección con eje z, no hay

Grafico:



QUE SUCEDE SI EL QUE FALTA ES “D”, EL TÉRMINO INDEPENDIENTE?

Sea que se trate de una ecuación completa o incompleta del plano, si falta el término “D” significa que el plano pasa por el origen del sistema coordenado.

Demostración:

Siguiendo con el mismo plano de ejemplo veamos que sucede si falta D en las distintas situaciones:

- a- Con ecuación completa: $4x + 3y - 1z = 0$

Superficies en el espacio-Superficies regladas-El plano

Intersección con ejes coordenados	Con eje coordenado "X" (para $y=0$ y $z=0$) $4x=0$ $x=0/4=0$ Intersección del plano con eje coordenado "X" K (0;0;0)	Con eje coordenado "Y" $3y=0$ (para $x=0$ y $z=0$) $y=0/3=0$ Intersección del plano con eje coordenado "Y" L (0;0;0)	Con eje coordenado "Z" $-1z=0$ (para $x=0$ y $y=0$) $z=0/-1=0$ Intersección del plano con eje coordenado "Z" T (0;0;0)
Intersección con PLANOS COORDENADOS	Con plano coordenado "XY" (para $z=0$) $4x+3y=0$ Intersección del plano con plano coordenado "XY": Recta: $y=(-4/3)x$	Con plano coordenado "XZ" (para $y=0$) $4x-1z=0$ Intersección del plano con plano coordenado "XZ": Recta: $z=(-4)x$	Con plano coordenado "YZ" (para $x=0$) $3y-1z=0$ Intersección del plano con plano coordenado "YZ": Recta: $z=(-3)y$