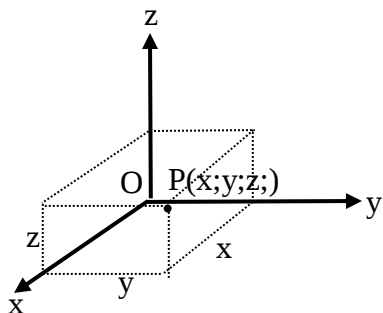


SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

De forma similar a la vista para el plano, se pueden definir distintos sistemas de coordenadas.

COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONALES

Al plano formado por los ejes **x** e **y** se le agrega un nuevo eje, perpendicular a los anteriores, denominado generalmente eje **z**. Así pasamos de dos a tres dimensiones.



Los tres ejes se cortan en un punto **O**, que es el origen de coordenadas.

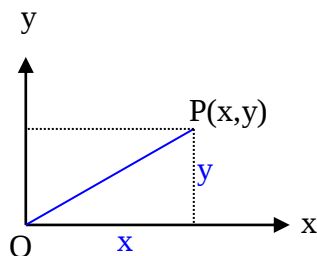
Aquí las coordenadas cartesianas están dadas por tres números que definen el punto **P**.

$P(x; y; z)$ (son las proyecciones de $\overline{OP}$ sobre cada eje).

El plano que contiene a dos de los ejes se llama *plano coordenado*. El que contiene al eje "x" e "y" se llama *plano xy*. En la misma forma quedan determinados los planos *yz* y *xz*.

Queda así establecida una correspondencia uno a uno entre los puntos del espacio y las ternas ordenadas de números reales.

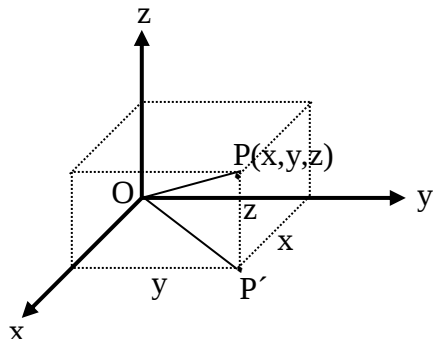
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



En el plano, por el teorema de Pitágoras es:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En el espacio se procede en forma similar, solo que se agrega el componente "z"



$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OP'}^2 + z^2}$$

pero:

$$\overline{OP'} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

finalmente:

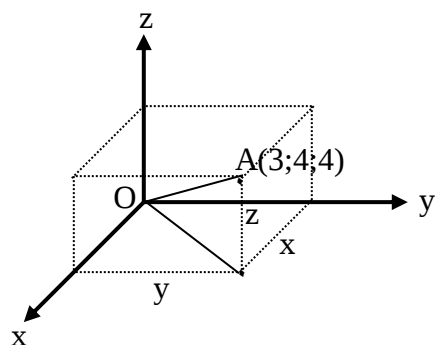
$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En el caso que vimos el punto **O** es el origen de coordenadas donde las componentes x, y, z del punto O son (0; 0; 0), pero si en lugar de **O** y **P** tuviésemos dos puntos cualesquiera A (x₁; y₁; z₁) y B (x₂; y₂; z₂), la distancia entre **A** y **B** serán:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejercicio 1:

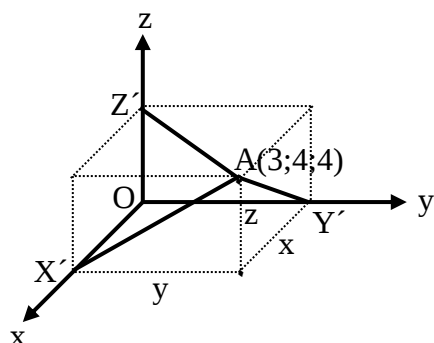
Dadas las coordenadas cartesianas del punto A = (3; 4; 4) hallar la distancia al origen y a los ejes coordenados.



Distancia al origen: $\overline{OA}$

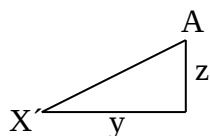
$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41} = 6,40$$

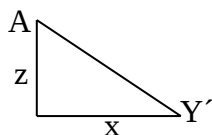
Distancias a los ejes **x**, **y**, **z**

En el paralelepípedo que se forma trazando las proyecciones del punto **A** en los planos **xy**, **yz**, **xz** podemos observar tres diagonales: $\overline{AZ'}$, $\overline{AX'}$ y $\overline{AY'}$.

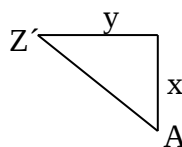
Estas diagonales son respectivamente las distancia al eje "z" ($\overline{AZ'}$), al eje "x" ($\overline{AX'}$) y al eje "y" ($\overline{AY'}$)



$$\overline{AX'} = \sqrt{z^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5,66$$



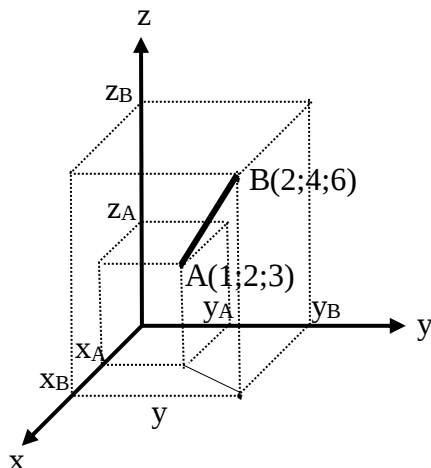
$$\overline{AY'} = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



$$\overline{AZ'} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Ejercicio 2:

Dados $A = (1; 2; 3)$ y $B = (2; 4; 6)$ hallar la distancia entre ambos



$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$d_{\overline{ab}} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (6-3)^2}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} = 3,74$$

Nota: Es indistinto hacer $(X_A - X_B)^2$ o $(X_B - X_A)^2$ ya que $(2 - 1)^2 = (1 - 2)^2$

Si comparamos el ejercicio 1 con el ejercicio 2, veremos que en realidad hemos procedido de igual forma, solo que las coordenadas del punto O (origen de coordenadas son (0; 0; 0) por lo que da:

$$d_{\overline{AO}} = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 + (z_A - z_O)^2} = d_{\overline{AO}} = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2 + (z_A - 0)^2}$$

$$d_{\overline{AO}} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

Ejercicio 3:

Dados A = (2; -4 ; -2) y B = (-1; 3; 4) hallar la distancia entre A y B.

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-(-4))^2 + (4-(-2))^2}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-3)^2 + (7)^2 + (6)^2} = \sqrt{9 + 49 + 36} = \sqrt{94} = 9,69$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dado un segmento $\overline{AB}$ cuyos extremos son A = (x₁; y₁; z₁) y B = (x₂; y₂; z₂), las coordenadas de su punto medio son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Ejercicio 4:

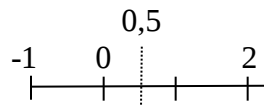
Dados A = (1; 2; 3) y B = (2; 4; 6) hallar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5 \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3+6}{2} = 4,5$$

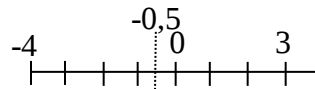
Ejercicio 5:

Dados $A = (-1; 3; 4)$ y $B = (2; -4; -2)$ hallar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$

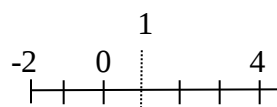
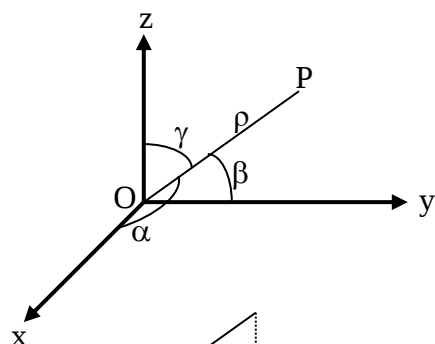
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = 0,5$$



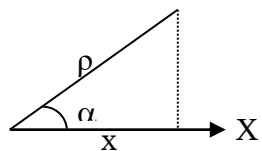
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 - 4}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$



$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

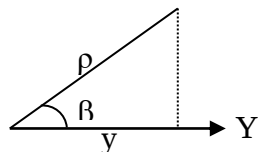
**ÁNGULOS DE DIRECCIÓN Y COSENOS DIRECTORES**

Sean α , β y γ los ángulos que $\overline{OP}$ forma con los ejes coordenados $\mathbf{ox}$, $\mathbf{oy}$ y $\mathbf{oz}$ respectivamente.



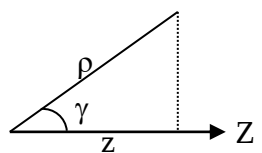
$$x = \rho \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$$



$$y = \rho \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\rho}$$



$$z = \rho \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\rho}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2 \alpha + \rho^2 \cos^2 \beta + \rho^2 \cos^2 \gamma$$

Sacamos factor común ρ^2 :

$$\rho^2 = \rho^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Dividimos ambos miembros por ρ^2 :

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

Los ángulos α , β y γ se llaman *ángulos de dirección* de $\overline{OP}$ y sus cosenos se llaman *cosenos directores* de $\overline{OP}$.

Ejercicio 6:

Dado $A = (1; 2; 3)$ hallar los cosenos directores y los ángulos de dirección.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = 3,74$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{3,74} = 0,26737 \Rightarrow \alpha = \arccos 0,26737 = 74^\circ 29' 32''$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\rho} = \frac{2}{3,74} = 0,53475 \Rightarrow \beta = \arccos 0,53475 = 57^\circ 40' 23''$$

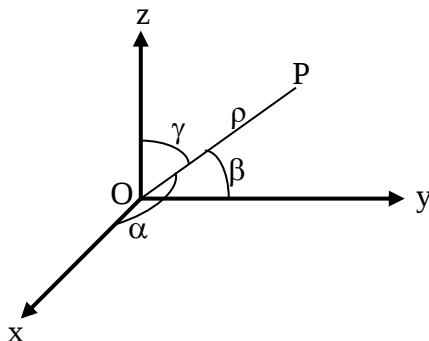
$$\cos \gamma = \frac{z}{\rho} = \frac{3}{3,74} = 0,80213 \Rightarrow \gamma = \arccos 0,80213 = 36^\circ 39' 58''$$

OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

En el espacio existen, además del sistema cartesiano ortogonal, otros tres sistemas alternativos que resultan particularmente adecuados para cierto tipo de problemas: Las coordenadas polares, las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas.

COORDENADAS POLARES

Un punto **P** del espacio queda definido por sus coordenadas **(ρ ; α ; β ; γ)** siendo ρ la distancia $\overline{OP}$ y α , β y γ los ángulos de dirección de $\overline{OP}$.



Se puede pasar de coordenadas polares a cartesianas:

$$x = \rho \cdot \cos \alpha$$

$$y = \rho \cdot \cos \beta$$

$$z = \rho \cdot \cos \gamma$$

También se puede hacer el camino inverso, es decir, dadas las coordenadas cartesianas (también llamadas rectangulares) las coordenadas polares, hallar las coordenadas polares:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{x}{\rho}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{y}{\rho}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \gamma = \arccos \frac{z}{\rho}$$

Ejercicio 7:

Dado el punto A = (2; 4; 3) hallar sus coordenadas polares.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29} = 5,38$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho} = \arccos \frac{2}{5,38} = 68^\circ 10' 36''$$

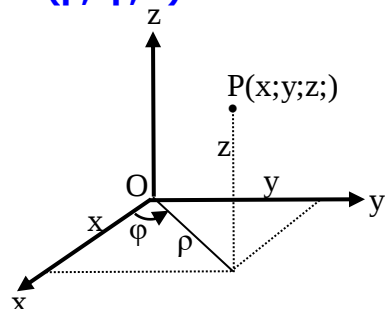
$$\beta = \arccos \frac{y}{\rho} = \arccos \frac{4}{5,38} = 41^\circ 58' 12''$$

$$\gamma = \arccos \frac{z}{\rho} = \arccos \frac{3}{5,38} = 56^\circ 6' 31''$$

$$A = (5,38; 68^\circ 10' 36''; 41^\circ 58' 12''; 56^\circ 6' 31'')$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Un punto **P** del espacio puede determinarse por: su distancia **z** al plano **xy** y por las coordenadas polares **ρ** y **φ** de su proyección ortogonal sobre dicho plano. Estas coordenadas **(ρ; φ; z)** se llaman **coordenadas cilíndricas** del punto **P**.



Las relaciones que permiten pasar de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas son:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 < \varphi < +\infty \\ 0 < \varphi < 2\pi \quad (1 \text{ giro}) \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

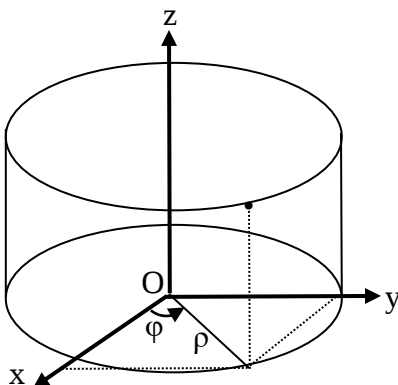
Recíprocamente, dadas las coordenadas cartesianas ortogonales, se pueden hallar las coordenadas cilíndricas mediante:

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \text{arc.tg} \frac{y}{x} \quad z = z$$

Nota: el conjunto de puntos **P (x; y; z)** que satisfacen:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \varphi \\ y &= \rho \cdot \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

corresponden a un cilindro circular de radio **ρ** lo que justifica el nombre de coordenada cilíndricas.



Ejercicio 8:

Dadas las coordenadas cartesianas de un punto **A = (2; 4; 3)** hallar las coordenadas cilíndricas.

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 4,47$$

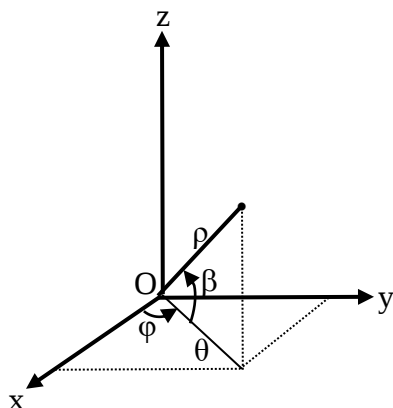
$$\varphi = \text{arc.tg} \frac{y}{x} = \text{arc.tg} \frac{4}{2} = \text{arc.tg} 2 = 63^\circ 26' 6''$$

$$z = 3$$

$$\mathbf{A} = (4,47; 63^\circ 26' 6''; 3)$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

Un punto **P** del espacio puede determinarse por: su distancia " **ρ** " al origen de coordenadas, el ángulo **φ** que forma la proyección **θ** de **ρ** sobre el plano **xy** ; y el ángulo **β** que forma **ρ** con **θ** . Es decir **$\mathbf{P} = (\rho; \varphi; \beta)$**



Para pasar de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas $P(x; y; z)$:

$$\cos \beta = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho \times \cos \beta$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho \cos \beta} \Rightarrow x = \rho \cos \beta \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho \cos \beta} \Rightarrow y = \rho \cos \beta \sin \varphi$$

$$\sin \beta = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho \sin \beta$$

Dadas las coordenadas cartesianas, se puede hallar las coordenadas esféricas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \text{arc.tg} \frac{y}{x}$$

$$\beta = \text{arc.sen} \frac{z}{\rho}$$

Nótese que $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ corresponde a la ecuación de una esfera con centro en el origen y radio ρ .

Ejercicio 9:

Dadas las coordenadas cartesianas del punto A = (2; 4; 3) hallar las coordenadas esféricas.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29} = 5,38$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{4}{2} = \arctan 2 = 63^\circ 26' 6''$$

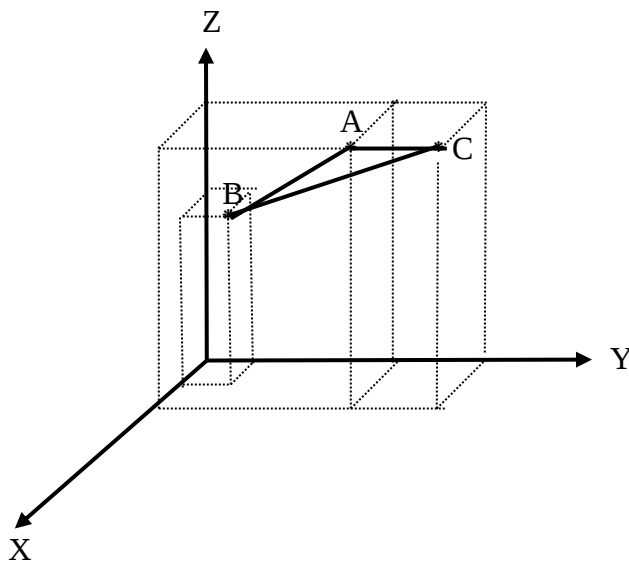
$$\beta = \arcsin \frac{z}{\rho} = \arcsin \frac{3}{5,38} = 33^\circ 53' 29''$$

Ejercicio 10:

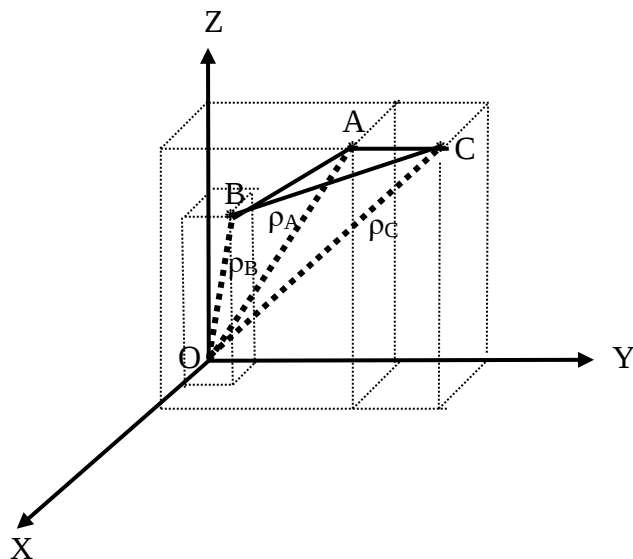
Dados el triángulo ABC determinado por sus vértices:

$$A = (2; 4; 5) \quad B = (1; 1; 4) \quad \text{y} \quad C = (2; 7; 5)$$

Hallar las coordenadas polares.



Para resolverlo se considera punto por punto, es decir que no se debe combinar los tres puntos, sino que cada vértice tendrá sus coordenadas polares independientemente del otro.



Vértice A:

$$\rho_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45} = 6,71$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho} = \arccos \frac{2}{6,71} = 72^\circ 39' 31''$$

$$\beta = \arccos \frac{y}{\rho} = \arccos \frac{4}{6,71} = 53^\circ 24' 26''$$

$$\gamma = \arccos \frac{z}{\rho} = \arccos \frac{5}{6,71} = 41^\circ 49' 39''$$

$$A = (6,71; 72^\circ 39' 31''; 53^\circ 24' 26''; 41^\circ 49' 39'')$$

Vértice B:

$$\rho_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 4,24$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho} = \arccos \frac{1}{4,24} = 76^\circ 21' 30''$$

$$\beta = \arccos \frac{y}{\rho} = \arccos \frac{1}{4,24} = 76^\circ 21' 30''$$

$$\gamma = \arccos \frac{z}{\rho} = \arccos \frac{4}{4,24} = 19^\circ 22' 12''$$

$$B = (4,24; 76^\circ 21' 30''; 76^\circ 21' 30''; 19^\circ 22' 12'')$$

Vértice C:

$$\rho_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2} = \sqrt{2^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{4+49+25} = \sqrt{78} = 8,83$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho} = \arccos \frac{2}{8,83} = 76^\circ 54' 32''$$

$$\beta = \arccos \frac{y}{\rho} = \arccos \frac{7}{8,83} = 37^\circ 33' 24''$$

$$\gamma = \arccos \frac{z}{\rho} = \arccos \frac{5}{8,83} = 55^\circ 30' 39''$$

$$C = (8,83; 76^\circ 54' 32''; 37^\circ 33' 24''; 55^\circ 30' 39'')$$