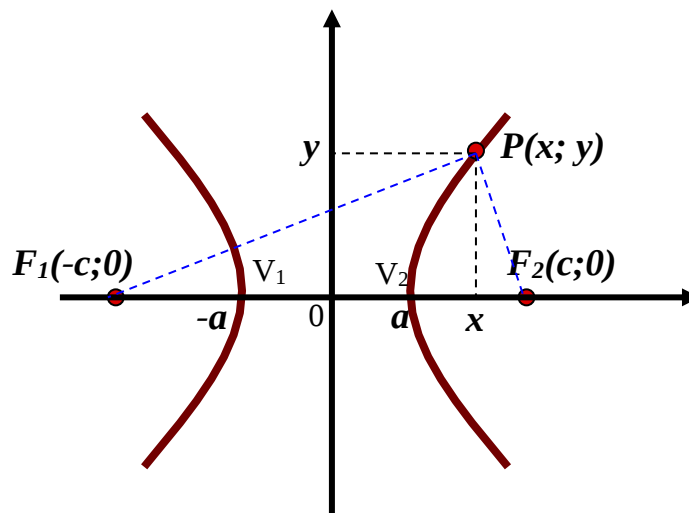


HIPÉRBOLA

Es el conjunto de puntos del plano tales que la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$$\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2} = \overline{P_2F_1} - \overline{P_2F_2} = cte = 2a$$



Donde:

F_1 y F_2 : son los focos de la hipérbola

Eje focal: recta que contiene a los focos

$\overline{F_1F_2}$: Distancia focal = $2c$

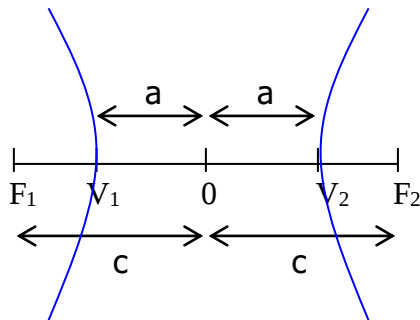
$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$ = Semidistancia focal

Centro de la hipérbola: (O) punto medio entre $\overline{F_1F_2}$

$\overline{V_1V_2}$: Eje real, principal o transversal de la hipérbola

$\overline{OV_1} = \overline{OV_2} = a$

Excentricidad de la hipérbola



Si observamos la figura, vemos que la distancia " a " es menor que " c ", por lo tanto la relación:

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

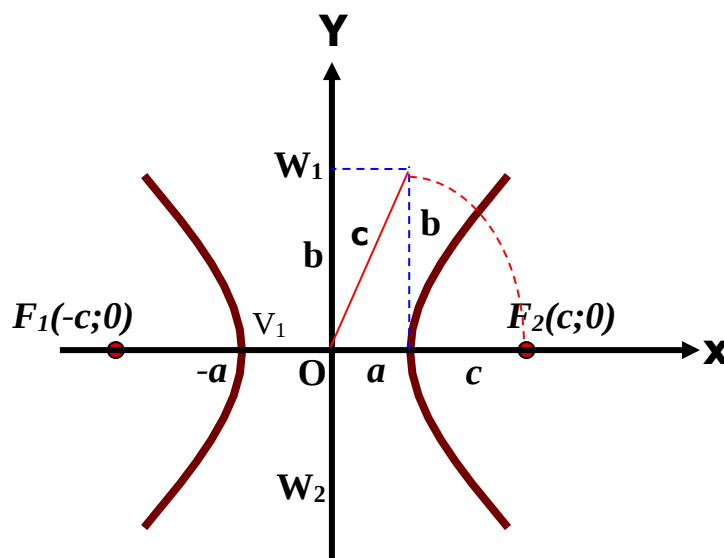
Si el foco se aleja del vértice, la distancia " c " será mucho mayor que la distancia " a ", por lo tanto será grande la excentricidad y se abrirán las ramas de la hipérbola.

Si el foco se acerca al vértice, la excentricidad tenderá a 1 y las ramas de la hipérbola se cerrarán.

Representemos en la gráfica:

La ubicación del eje imaginario (o no transverso) queda determinada rebatiendo la distancia " c " hasta cortar a la perpendicular al eje X que pasa por el vértice de la hipérbola, formándose así la distancia " b ". Esta distancia, medida desde el centro de la hipérbola, nos da los vértices " W_1 " y " W_2 ".

El segmento $\overline{W_1W_2}$ se denomina eje imaginario.

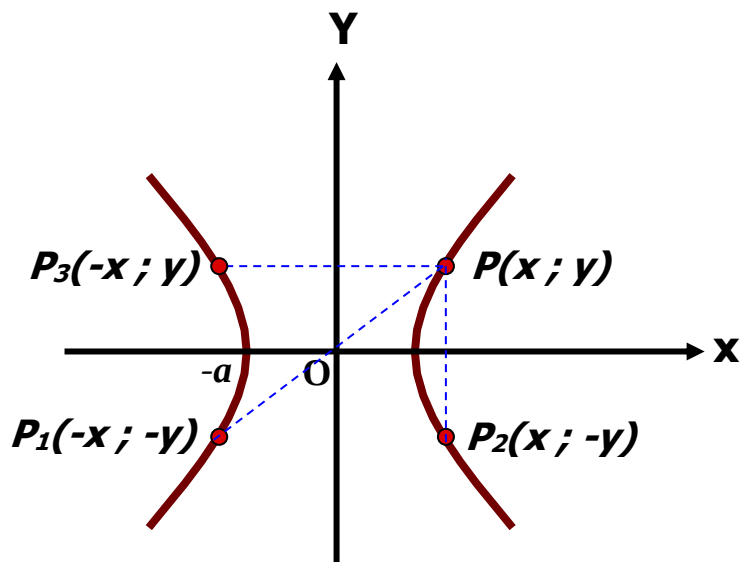


Si observamos la gráfica anterior, podemos notar que se forma un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es la distancia "**c**", y los catetos son las distancias "**a**" y "**b**".

Utilizando el teorema de Pitágoras podemos calcular cualquiera de esos valores si conocemos los otros dos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

SIMETRÍA DE LA HIPÉRBOLA



Vemos en el gráfico que el punto P de coordenadas (x ; y) tiene puntos simétricos:

P_1 = simétrico respecto del centro O

P_2 = simétrico respecto del eje real

P_3 = simétrico respecto del eje imaginario

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Caso 1: Cuando el centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas.

La ecuación que representa a los puntos pertenecientes a la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ecuación canónica de la hipérbola}$$

Esta ecuación se utiliza cuando el **centro de la hipérbola coincide con el origen** de coordenadas cartesianas.

Para que un punto pertenezca a la hipérbola, es decir que esté situado sobre la curva de la hipérbola, debe satisfacer esa ecuación.

Ejemplo: Dada un punto A de coordenadas (4 ; 5) verificar si pertenece a la hipérbola de ecuación:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

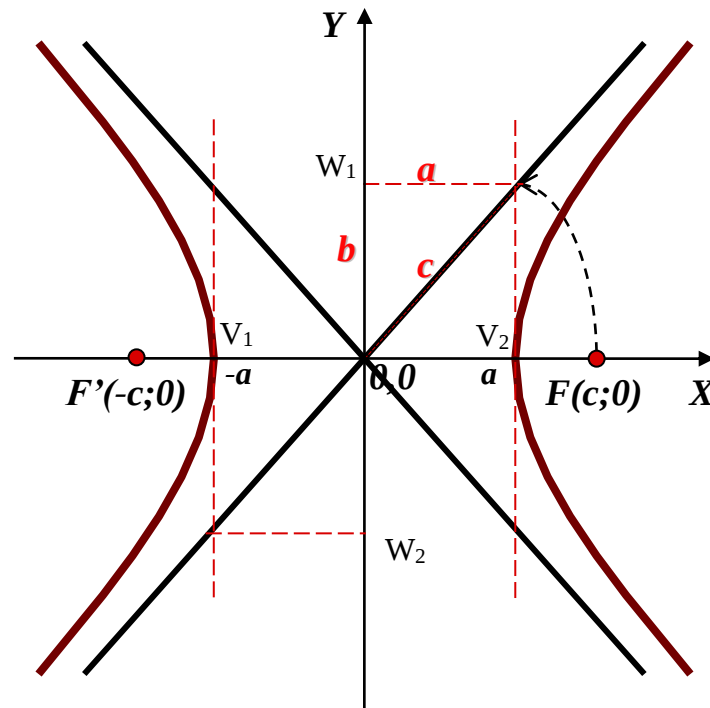
Para averiguarlo debemos reemplazar en la ecuación los valores de X e Y por las coordenadas del punto dado:

$$\frac{4^2}{3^2} - \frac{5^2}{4^2} = 1 \longrightarrow \frac{16}{9} - \frac{25}{16} = 1 \longrightarrow 1,78 - 1,56 \neq 1 \longrightarrow 0,22 \neq 1$$

Como vemos, al reemplazar los valores de X e Y en la ecuación, no se mantiene la igualdad, esto quiere decir que el punto A (4 ; 5) **no pertenece** a la hipérbola representada por la ecuación dada.

Si el resultado del reemplazo hubiese sido $1 = 1$ el punto A **si hubiese** pertenecido a la curva.

ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA



Por los vértices V_1 y V_2 trazamos las perpendiculares al eje X .
 Por los vértices W_1 y W_2 trazamos las perpendiculares al eje Y .
 Se generan dos rectas cuyas ecuaciones son:

$$y = \frac{b}{a} x \quad y' = -\frac{b}{a} x$$

Estas rectas se llaman asíntotas de la hipérbola. Las ramas de la hipérbola se aproximan indefinidamente a las asíntotas, pero nunca se tocan.
 En ellas la distancia entre curva y recta tiende a cero cuando x , y o ambas tienden a infinito.

Ejemplo: Dada la ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ determinar: Semieje real, semieje imaginario, coordenadas del centro, vértices y focos, excentricidad y ecuación de las asíntotas.

Semieje real: Si $a^2 = 9 \Rightarrow a = \sqrt{9} = 3$

Semieje imaginario: Si $b^2 = 16 \Rightarrow b = \sqrt{16} = 4$

Coordenadas del centro: Como el centro coincide con el origen de coordenadas, será: $O(0; 0)$

Coordenadas de los vértices:

$$V_1(-a; 0) = (-3; 0)$$

$$V_2(+a; 0) = (+3; 0)$$

$$W_1(0; +b) = (0; +4)$$

$$W_2(0; -b) = (0; -4)$$

Coordenadas de los focos:

Por teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$$F_1(-c; 0) = (-5; 0)$$

$$F_2(+c; 0) = (5; 0)$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} = 1,66$

Ecuación de las asíntotas:

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = \frac{4}{3}x$$

$$y' = -\frac{b}{a}x \quad y = -\frac{4}{3}x$$

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Caso 2: Cuando el centro de la hipérbola **NO** coincide con el origen de coordenadas.

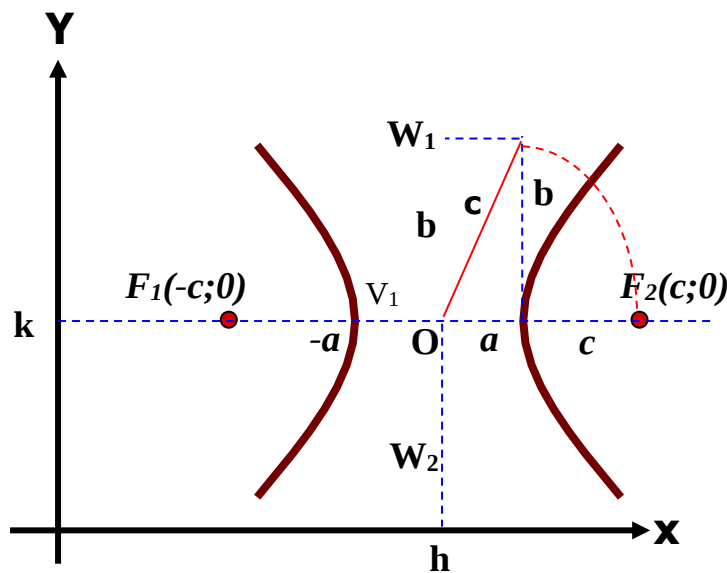
La ecuación que representa a los puntos pertenecientes a la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ecuación canónica de la hipérbola}$$

Esta ecuación se utiliza cuando el **centro de la hipérbola **NO** coincide con el origen** de coordenadas cartesianas.

"h" y **"k"** son las coordenadas del centro de la hipérbola, y deben ser incluidas en la ecuación para representar el corrimiento de la hipérbola respecto del origen de coordenadas.

El hecho que la hipérbola se halle desplazada respecto del origen de coordenadas no deforma la hipérbola, por lo tanto no variará su excentricidad, es decir que las ramas de la hipérbola tendrán la misma apertura sea donde fuere que ubiquemos el sistema de ejes cartesianos, ya que éstos son solo un punto de referencia.



Ejemplo: Dada la ecuación $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ determinar: Semieje real, semieje imaginario, coordenadas del centro, vértices y focos, excentricidad y ecuación de las asíntotas.

Semieje real: Si $a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$

Semieje imaginario: Si $b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9} = 3$

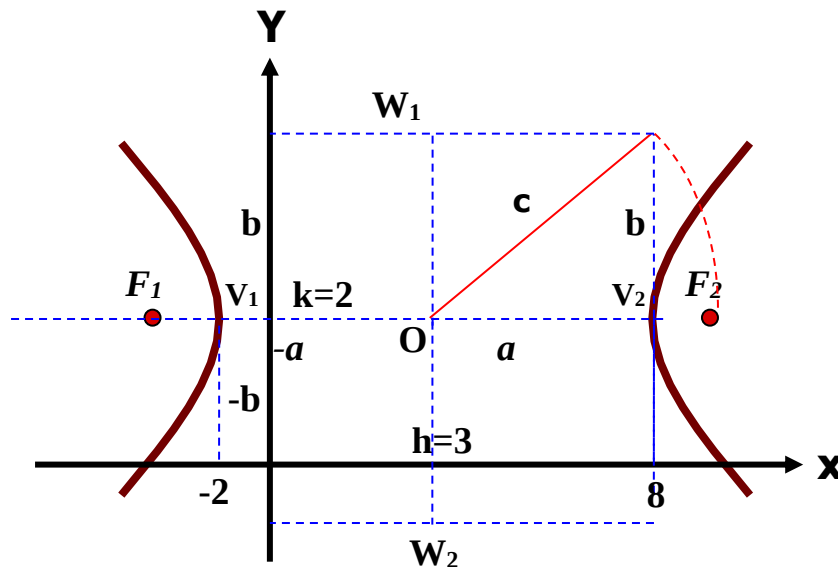
Coordenadas del centro: Como el centro **NO** coincide con el origen de coordenadas, debemos identificar los valores de "**h**" y "**k**".

Para que **(x - h)** sea igual a **(x - 3)** debe ser **h = 3**

Para que **(y - k)** sea igual a **(y - 2)** debe ser **y = 2**

será: O (h ; k) = (3 ; 2)

Representemos gráficamente:



Coordenadas de los vértices:

$$V_1 (h-a ; k) = (3-5 ; 2) = (-2 ; 2)$$

$$V_2 (h+a ; k) = (3+5 ; 2) = (8 ; 2)$$

$$W_1 (h ; k+b) = (3 ; 2+3) = (3 ; 5)$$

$$W_2 (h ; k-b) = (3 ; 2-3) = (3 ; -1)$$

Coordenadas de los focos:

Por teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5,83$

$$F_1 (h-c ; k) = (3-5,83 ; 2) = (-2,83 ; 2) \quad F_2 (h+c ; k) = (3+5,83 ; 2) = (8,83 ; 2)$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5,83}{5} = 1,166$

Ecuación de las asíntotas:

Aquí, por no pasar las rectas por el origen, no podemos emplear las ecuaciones vistas anteriormente,

Debemos plantear la ecuación de la recta que pasa por un punto:

$$(y - k) = \pm m (x - h)$$

donde "h" y "k" son las coordenadas del centro de la hipérbola y m es la pendiente de la recta

Resumiendo: $h = 3$ $k = 2$ $+/- m = +/- \frac{b}{a}$

Con estos datos formamos las ecuaciones

Para la primer asíntota:

$$(y - k) = + \frac{b}{a} (x - h) \quad (y - 2) = + \frac{3}{5} (x - 3)$$

$$(y - 2) = + \frac{3}{5} x - \frac{3}{5} \cdot 3 \quad y = + \frac{3}{5} x - \frac{9}{5} + 2$$

$$y = + \frac{3}{5} x + \frac{1}{5}$$

Para la segunda asíntota:

$$(y - k) = - \frac{b}{a} (x - h) \quad (y - 2) = - \frac{3}{5} (x - 3)$$

$$(y - 2) = - \frac{3}{5} x + \frac{3}{5} \cdot 3 \quad y = - \frac{3}{5} x + \frac{9}{5} + 2$$

$$y = - \frac{3}{5} x + \frac{19}{5}$$

CASO EN EL QUE EL EJE FOCAL ES PARALELO O COINCIDENTE CON EL EJE "y"

Hasta ahora hemos visto la hipérbola con el eje focal paralelo o coincidente con el eje "x", es decir con el eje focal horizontal. Cuando el eje focal es vertical, es decir paralelo, o bien, coincidente con el eje "y" debemos modificar las ecuaciones.

Si observamos las ecuaciones consideradas hasta el momento, podremos advertir que la distancia "**a**" estaba en correspondencia con "**x**", y la distancia "**b**" estaba en coincidencia con "**y**". Para el nuevo caso que nos toca, la distancia "**a**" estará en coincidencia con "**y**" y la distancia "**b**" estará en coincidencia con "**x**".

Por otro lado, hasta ahora al termino en "**x**" se le **restaba** el término en "**y**", cuando en este nuevo caso al termino en "**y**" se le **resta** el término en "**x**".

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Caso 3: Cuando el centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas.

La ecuación que representa a los puntos pertenecientes a la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ecuación canónica de la hipérbola}$$

Caso 4: Cuando el centro de la hipérbola **NO** coincide con el origen de coordenadas.

La ecuación que representa a los puntos pertenecientes a la hipérbola es:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ecuación canónica de la hipérbola}$$

