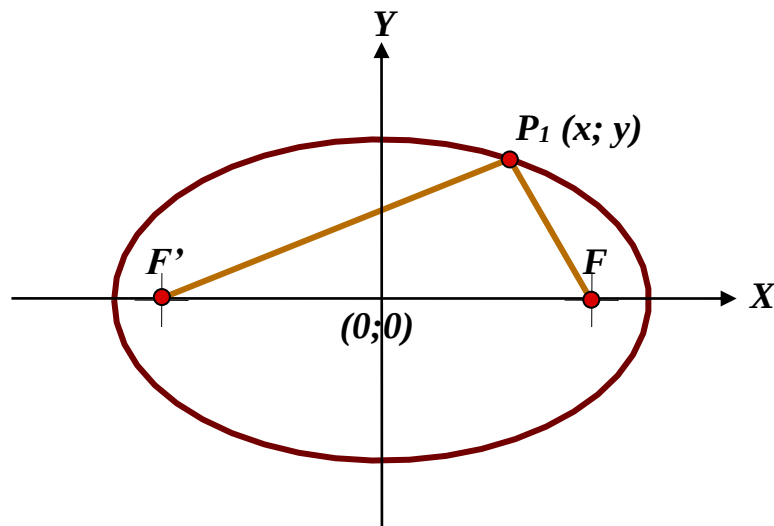


ELIPSE

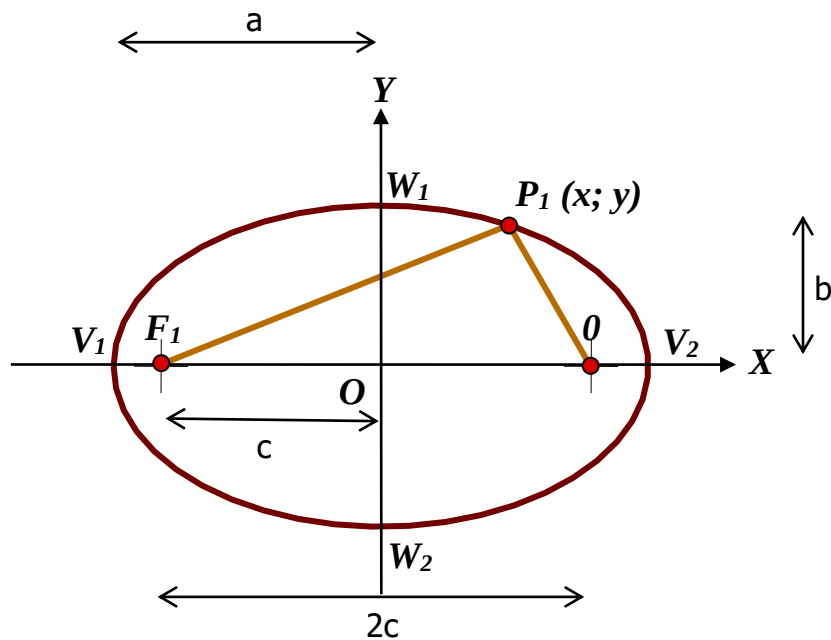


Es el conjunto de puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$$\overline{P_1F'} + \overline{P_1F} = \overline{P_2F'} + \overline{P_2F} = \overline{P_nF'} + \overline{P_nF} = cte = 2a$$

Siendo "2a" la longitud del diámetro mayor de la elipse.

Elementos de la elipse



V_1, V_2, W_1, W_2 = vértices de la elipse

F_1, F_2 = focos de la elipse

O = centro de la elipse = punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$

Segmento $\overline{V_1V_2}$ = diámetro mayor = $2a$

Segmento $\overline{W_1W_2}$ = diámetro menor

a = semidiámetro mayor

b = semidiámetro menor

c = semidistancia focal

$2c$ = distancia focal = segmento $\overline{F_1F_2}$

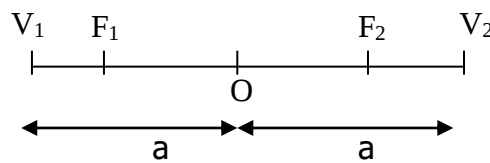
Como el vértice V_1 es un punto de la elipse, se debe dar que la suma de las distancias desde este punto a los focos sea igual a $2a$.

Es decir que:

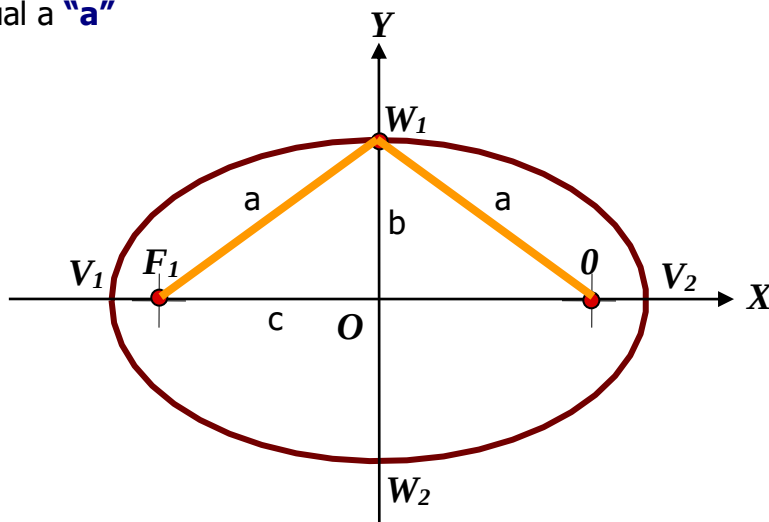
$$\overline{V_1F_1} + \overline{V_1F_2} = cte = 2a$$

Pero: $\overline{V_1F_1} = \overline{V_2F_2}$

Entonces: $\overline{V_1F_1} + \overline{V_1F_2} = \overline{V_2F_2} + \overline{V_1F_2} = 2a$



El vértice W_1 también es un punto de la elipse, por lo que $\overline{W_1F_1} + \overline{W_1F_2} = 2a$. Eso quiere decir que la distancia desde W a cualquiera de los focos debe ser igual a **"a"**



Por el teorema de Pitágoras será:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidad de la elipse

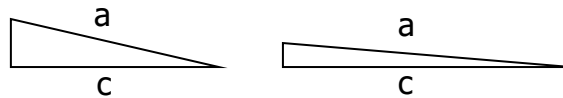
Se entiende por excentricidad a la relación entre c y a .

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Como " a " es mayor que " c ", el valor de la excentricidad estará entre **0** y **1**.

Si $e = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow$ es una circunferencia

Si $e = 1$ implica que los focos se alejan entre sí y " c " tiende a igualarse con " a ", de modo que la elipse se estira hasta convertirse en una recta.



Ecuación de la elipse (cuando el centro coincide con el origen de coordenadas)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta ecuación representa a cualquier punto perteneciente a la elipse, es decir que para un semieje " a " y otro semieje " b " conocidos, cualquier punto cuyas coordenadas ($x:y$) verifiquen esta ecuación (es decir que operando la ecuación se iguale a 1) pertenecerá a la elipse. En caso de que la ecuación de un valor distinto de 1, el punto no pertenecerá a la elipse.

Ejemplo: Verificar si para la ecuación dada los puntos A (4;0) y B (5;0) pertenecen a la elipse.

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Punto A (4;0):

Reemplazamos en la ecuación los valores $x = 4$ $y = 0$ (coordenadas del punto A).

$$\frac{4^2}{4^2} + \frac{0^2}{2^2} = 1$$

Operamos en la ecuación y obtenemos: $1 + 0 = 1$

Vemos que la igualdad se verifica, es decir que ($1 = 1$), que implica que **el punto A si pertenece a la elipse.**

Punto B (5;0):

Reemplazamos en la ecuación los valores $x = 5$ $y = 0$ (coordenadas del punto A).

$$\frac{5^2}{4^2} + \frac{0^2}{2^2} = 1$$

Operamos en la ecuación y obtenemos: $1,5625 + 0 = 1$

Vemos que la igualdad no se verifica, es decir que ($1,5625 \neq 1$), que implica que **el punto B no pertenece a la elipse.**

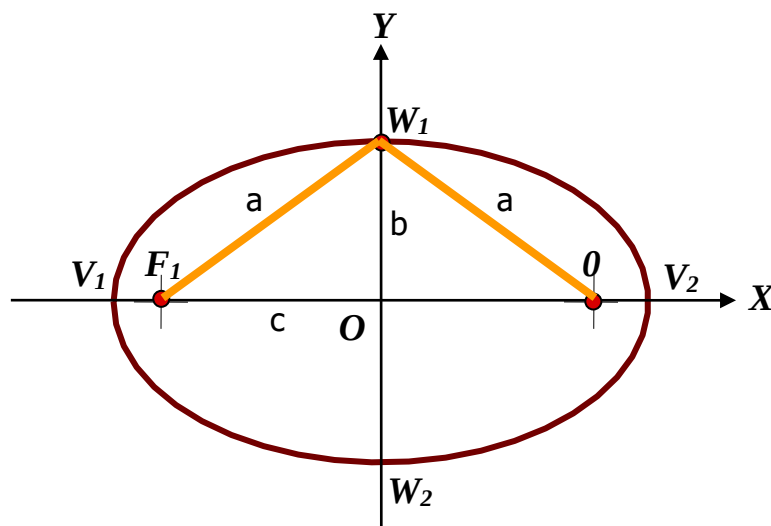
Ejemplo: Dada la ecuación de la elipse, determinar los valores de "a", "b", "c", excentricidad de la elipse y las coordenadas de los cuatro vértices y de los dos focos.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Comparando la ecuación dada con la ecuación genérica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Podemos deducir que $a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \sqrt{4} = 2$$



Por el teorema de Pitágoras será:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

De observar el dibujo, vemos que, por el teorema de Pitágoras, será:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,46$$

La excentricidad será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3,46}{4} = 0,865 \quad (\text{la elipse tiende a estirarse})$$

Coordenadas de los vértices:

Vértice V_1 :

Según el eje X, el vértice está desplazado una distancia " $a = 4$ " hacia la izquierda del origen de coordenadas, por lo tanto será la coordenada $X = -4$.

Según el eje Y, por estar el vértice situado sobre el eje X, su elevación sobre el eje Y será nula, por lo tanto será $Y = 0$.

De este modo las coordenadas del vértice serán: $V_1 (-4 ; 0)$

Vértice V_2 :

Según el eje X, el vértice está desplazado una distancia " $a = 4$ " hacia la derecha del origen de coordenadas, por lo tanto será la coordenada $X = +4$.

Según el eje Y, por estar el vértice situado sobre el eje X, su elevación sobre el eje Y será nula, por lo tanto será $Y = 0$.

De este modo las coordenadas del vértice serán: $V_2 (+4 ; 0)$

Vértice W_1 :

Según el eje Y, el vértice está desplazado una distancia " $b = 2$ " hacia el sentido positivo del eje (respecto del origen de coordenadas), por lo tanto será la coordenada $Y = +2$.

Según el eje X, por estar el vértice situado sobre el eje Y, su desplazamiento sobre el eje X será nula, por lo tanto será $X = 0$.

De este modo las coordenadas del vértice serán: $V_1 (0 ; +2)$

Vértice W_2 :

Según el eje Y, el vértice está desplazado una distancia " $b = -2$ " hacia el sentido negativo del eje (respecto del origen de coordenadas), por lo tanto será la coordenada $Y = -2$.

Según el eje X, por estar el vértice situado sobre el eje Y, su desplazamiento sobre el eje X será nula, por lo tanto será $X = 0$.

De este modo las coordenadas del vértice serán: $V_1 (0 ; -2)$

Coordenadas de los Focos

Foco F_1 :

Según el eje X, el vértice está desplazado una distancia " $c = 3,46$ " hacia la izquierda del origen de coordenadas, por lo tanto será la coordenada $X = -3,46$.

Según el eje Y, por estar el vértice situado sobre el eje X, su elevación sobre el eje Y será nula, por lo tanto será $Y = 0$.

De este modo las coordenadas del vértice serán: $V_2 (-3,46 ; 0)$

Foco F_2

Según el eje X, el vértice está desplazado una distancia " $c = 3,46$ " hacia la derecha del origen de coordenadas, por lo tanto será la coordenada $X = + 3,46$. Según el eje Y, por estar el vértice situado sobre el eje X, su elevación sobre el eje Y será nula, por lo tanto será $Y = 0$.

De este modo las coordenadas del vértice serán: $V_2 (+3,46 ; 0)$

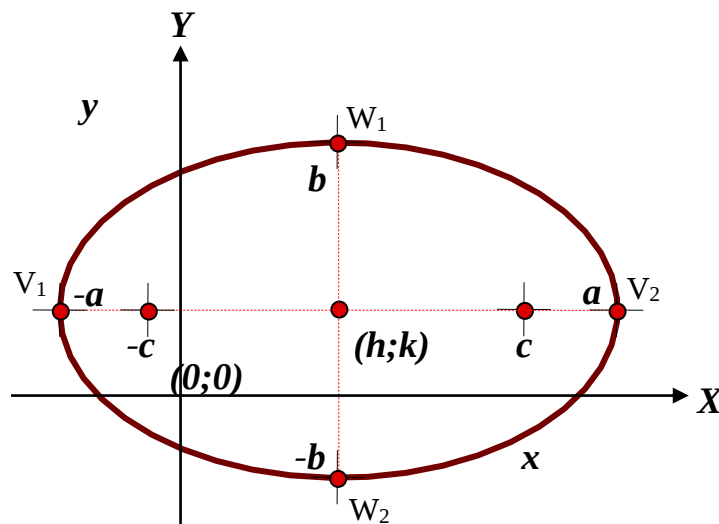
Ecuación de la elipse (cuando el centro **NO** coincide con el origen de coordenadas)

Se incorpora en la ecuación las coordenadas del centro de la elipse, para tener en cuenta la ubicación de la misma en el sistema coordenado:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Siendo "**h**" y "**k**" las coordenadas del centro de la elipse.

Esta ecuación representa a cualquier punto perteneciente a la elipse, es decir que para un semieje " a " y otro semieje " b " conocidos, y para coordenadas del centro $(h ; k)$ también conocidos, cualquier punto cuyas coordenadas $(x;y)$ verifiquen esta ecuación (es decir que operando la ecuación se iguale a 1) pertenecerá a la elipse. En caso de que la ecuación de un valor distinto de 1, el punto no pertenecerá a la elipse.



Ejemplo: Dada la ecuación de la elipse, determinar los valores de "h", "k", "a", "b", "c", excentricidad de la elipse y las coordenadas de los cuatro vértices y de los dos focos.

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

Comparando la ecuación dada con la ecuación genérica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Podemos deducir que $a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \sqrt{4} = 2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,46$$

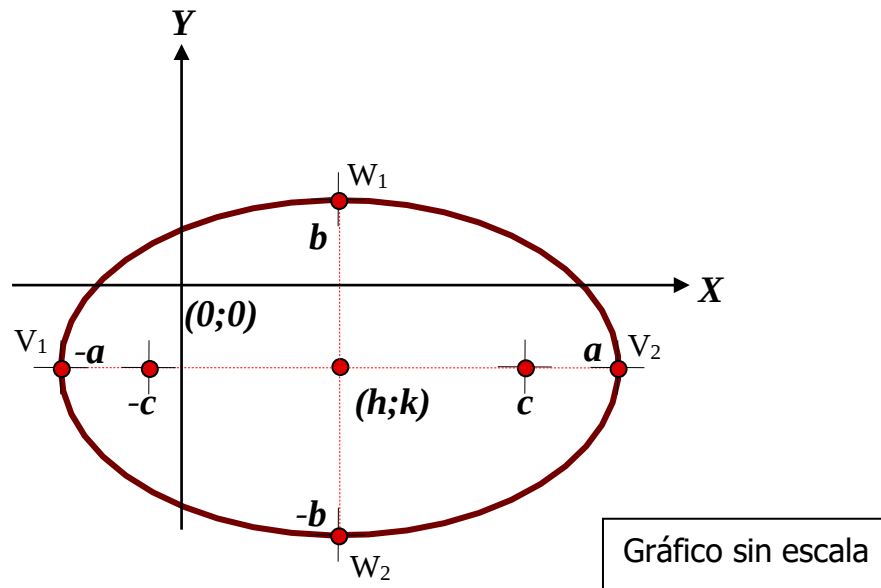
La excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{3,46}{4} = 0,865$

Vemos que, respecto del ejercicio anterior donde el centro de la elipse coincidía con el origen de coordenadas, los valores de "a", "b", "c" y la excentricidad no varían, es decir que la elipse no se deforma al cambiar de posición, solo se modifican los valores de "h" y "k", que antes eran iguales a cero y ahora tienen cada una un valor específico.

En cuanto a identificar los valores de "h" y "k"

Para que $(x-h)^2$ sea igual a $(x-3)^2$ debe ser **$h = 3$**

Para que $(y-k)^2$ sea igual a $(y+2)^2$ debe ser **$k = -2$**



Coordenadas de los vértices:

Vértice V_1 :

Para ubicar la coordenada X del vértice, debo desplazarme una distancia " $h=3$ " hacia la derecha del eje Y, para luego retroceder una distancia " $a=4$ " (hacia la izquierda), resultando $X = 3 - 4 = -1$

Para la coordenada Y del vértice, debo descender una distancia " $k=2$ " por debajo del eje X, es decir que será $Y = -2$

De modo que las coordenadas del vértice V_1 serán $(-1; -2)$

Vértice V_2 :

Para ubicar la coordenada X del vértice, debo desplazarme una distancia " $h=3$ " hacia la derecha del eje Y, para luego agregar una distancia " $a=4$ " (hacia la derecha), resultando $X = 3 + 4 = +7$

Para la coordenada Y del vértice, debo descender una distancia " $k=2$ " por debajo del eje X, es decir que será $Y = -2$

De modo que las coordenadas del vértice V_2 serán $(+7; -2)$

Vértice W_1 :

Para ubicar la coordenada X del vértice, debo desplazarme una distancia " $h=3$ " hacia la derecha del eje Y, resultando $X = 3$

Para la coordenada Y del vértice, debo descender una distancia "k=2" por debajo del eje X, para luego subir una distancia " b=2 " , es decir que será $Y = -2 + 2 = 0$

De modo que las coordenadas del vértice W₁ serán **(+3 ; 0)**

Vértice W₂:

Para ubicar la coordenada X del vértice, debo desplazarme una distancia "h=3" hacia la derecha del eje Y, resultando **X = 3**

Para la coordenada Y del vértice, debo descender una distancia "k=2" por debajo del eje X, para luego continuar descendiendo una distancia " b=2 " , es decir que será $Y = -2 - 2 = -4$

De modo que las coordenadas del vértice W₁ serán **(+3 ; - 4)**

Coordenadas de los Focos

Foco F₁:

Para ubicar la coordenada X del foco, debo desplazarme una distancia "h=3" hacia la derecha del eje Y, para luego retroceder una distancia "c=3,46" (hacia la izquierda), resultando **X = 3 - 3,46 = -0,46**

Para la coordenada Y del vértice, debo descender una distancia "k=2" por debajo del eje X, es decir que será **Y = - 2**

De modo que las coordenadas del vértice V₁ serán **(-0,46 ; -2)**

Foco F₂

Para ubicar la coordenada X del vértice, debo desplazarme una distancia "h=3" hacia la derecha del eje Y, para luego agregar una distancia "c=3,46" (hacia la derecha), resultando **X = 3 + 3,46 = + 6,46**

Para la coordenada Y del vértice, debo descender una distancia "k=2" por debajo del eje X, es decir que será **Y = - 2**

De modo que las coordenadas del vértice V₁ serán **(+6,46 ; -2)**

Hasta aquí hemos contemplado el caso en que la elipse es a eje paralelo al eje X (o coincidente con el eje X).

Caso en que la elipse es a eje paralelo al eje Y

En este caso la ecuación cambia levemente de forma:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

Nótese que **"b"** está en coincidencia con **"X"**

y que **"a"** está en coincidencia con **"y"**