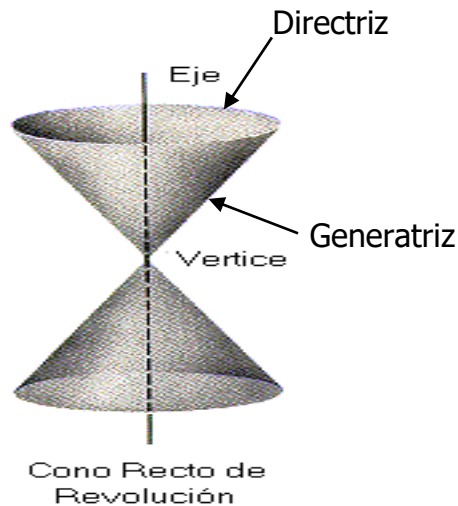


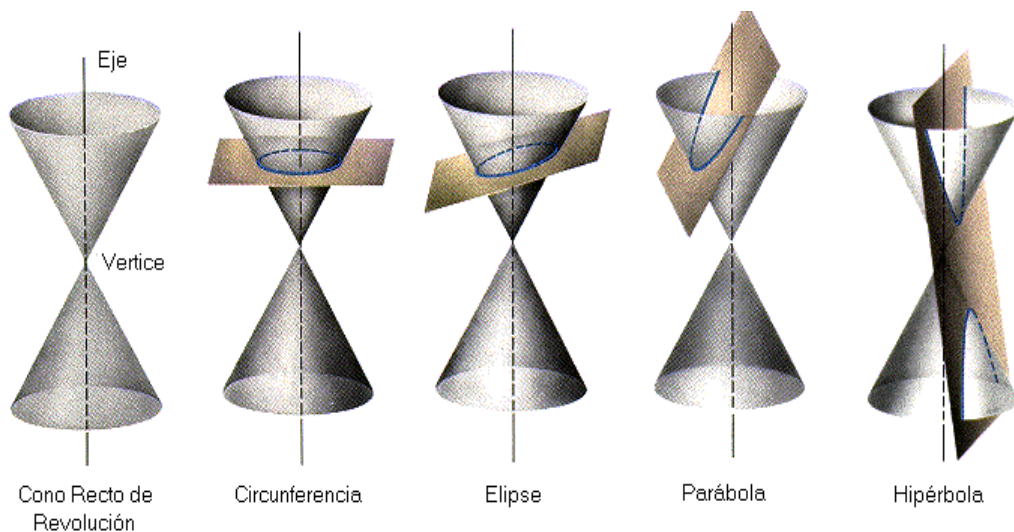
CÓNICAS



Una superficie cónica está generada por una recta (**generatriz**) que se mueve apoyándose en una curva fija (**directriz**) y que pasa por un punto fijo (**vértice**).

Si la directriz es una circunferencia y el eje perpendicular a ella y pasa por su centro, esa superficie es llamada **cono circular recto**.

Las cónicas se obtienen de la intersección de un plano con un cono circular recto.



Si el plano es perpendicular al eje, la figura cónica es una **circunferencia**.

En cuanto el plano se inclina, la circunferencia se deforma, transformándose en una **elipse**.

Si el plano es paralelo a la generatriz, se obtiene la **parábola**.

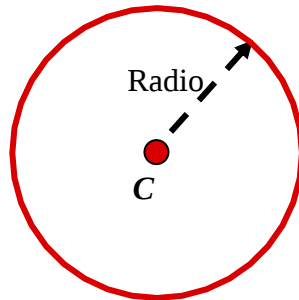
Cuando el plano es paralelo al eje, corta a la superficie cónica en ambos lados respecto del vértice, y se obtiene la **hipérbola**.

Si el plano corta a la superficie cónica en ambos lados respecto del vértice, pero sin ser paralelo al eje, también se forma una hipérbola, pero sus ramas no serán simétricas.

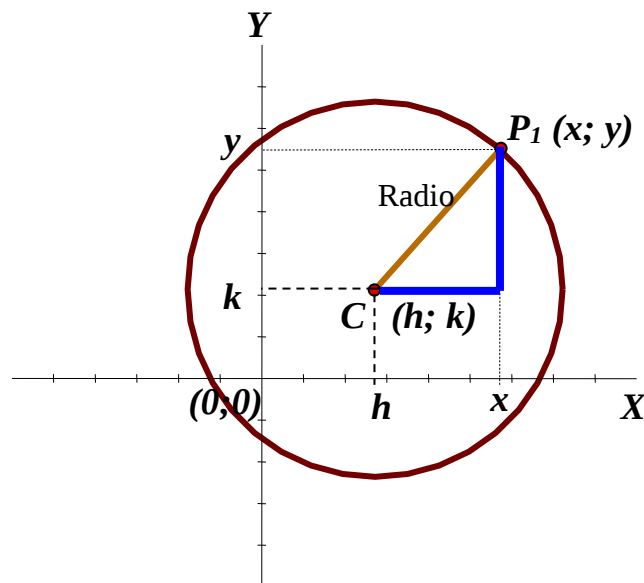
Nosotros estudiaremos el caso de hipérbola con ramas simétricas.

CIRCUNFERENCIA

Se llama circunferencia de centro c y de radio R al conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a c es igual a R .



ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA



Si observamos el triángulo rectángulo donde el radio es la hipotenusa, valiéndonos del teorema de Pitágoras podemos calcular el radio de la circunferencia, donde un cateto mide $(x - h)$ y el otro cateto mide $(y - k)$, por lo que será:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2 \quad \text{Ecuación canónica de la circunferencia}$$

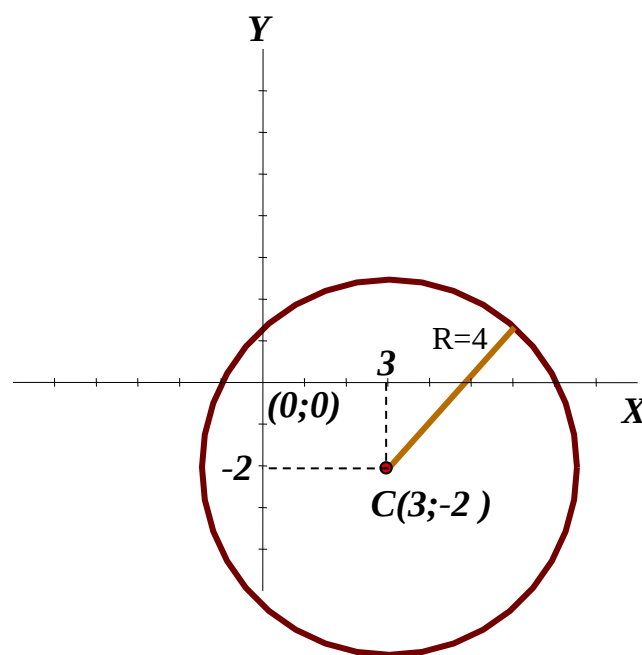
Donde h y k son las coordenadas del centro de la circunferencia.

Ejemplo: Dadas las coordenadas del centro C (3 ; -2) y el Radio = 4 expresar la ecuación canónica de la circunferencia.

Respuesta:

$$(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 4^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4^2 \quad \text{Ecuación canónica de la circunferencia}$$



Ejemplo: Dada la ecuación $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 3^2$ determinar valores de h, k y radio.

Respuesta: De comparar la ecuación dada con la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

Se deduce que $h = 2$ $k = -5$ y Radio = 3

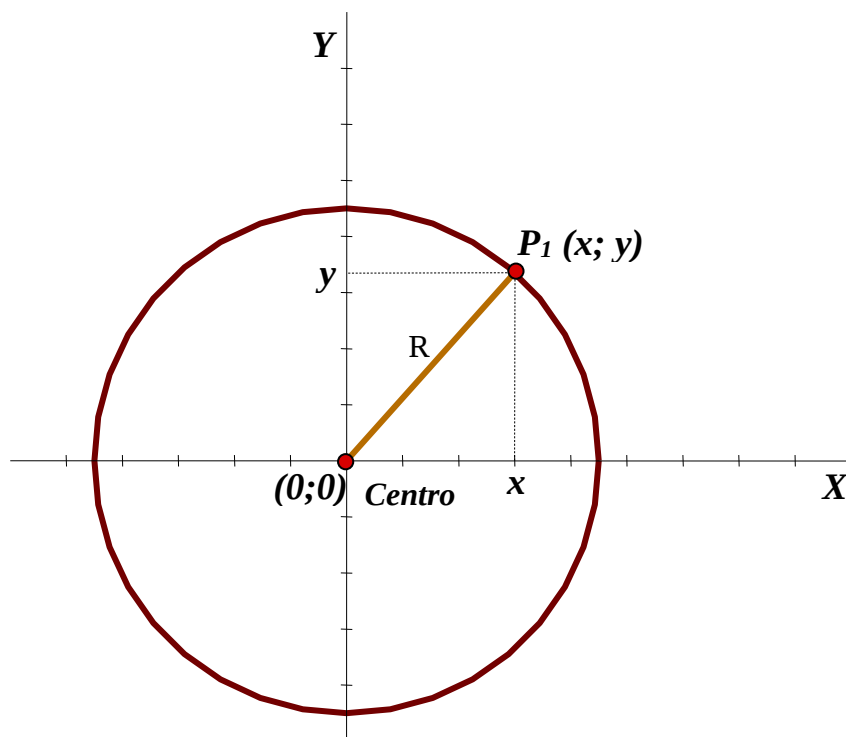
Cuando el centro de la circunferencia coincide con el origen del sistema de coordenadas, los valores de h y k son:

$$h = 0 \quad k = 0$$

y la fórmula queda:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

que se denomina *Ecuación Canónica Reducida* de la Circunferencia.

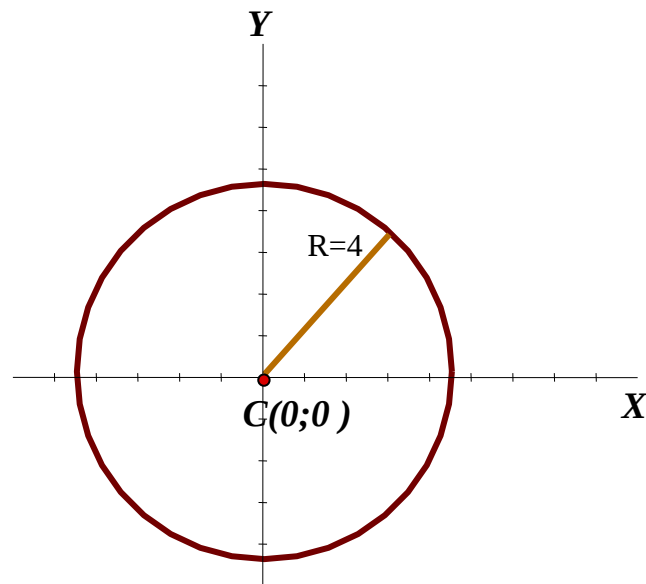


Ejemplo: Dadas las coordenadas del centro C (0 ; 0) y el Radio = 4 expresar la ecuación canónica de la circunferencia.

Respuesta:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 = 4^2 \quad \text{Ecuación canónica reducida de la circunferencia}$$



Ejemplo: (el camino inverso al del ejercicio anterior) Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 = 16$$

Deducir los valores de **h** , **k** y **Radio**

Respuesta: de comparar la ecuación dada con la ecuación genérica:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

Se deduce que $h = 0$ $k = 0$ $Radio = \sqrt{16} = 4$

Es decir que el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas.

Ecuación general de la circunferencia

Partiendo de la ecuación canónica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

y resolviendo los cuadrados de los binomios se llega a la siguiente expresión:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = R^2$$

Ahora, si reordenamos los términos e igualamos a cero:

$$x^2 + y^2 + \underbrace{-2h x}_D + \underbrace{-2k y}_E + \underbrace{h^2 + k^2 - R^2}_F = 0$$

Si al término $(-2h)$ lo llamamos "D"

al término $(-2k)$ lo llamamos "E"

y a al término $(h^2 + k^2 - R^2)$ lo llamamos "F"

la expresión queda de la forma genérica:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{\textit{Ecuación general de la circunferencia}}$$

Ejemplo: Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$

Determinar los valores de **h**, **k** y **Radio**

Comparemos las dos ecuaciones (la que tenemos como dato y la genérica):

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Podemos observar que:

$$\begin{aligned} D &= -6 \\ E &= +10 \\ F &= +18 \end{aligned}$$

$$\text{Si } D = -2h \Rightarrow -6 = -2h \Rightarrow h = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\text{Si } E = -2k \Rightarrow 10 = -2k \Rightarrow k = \frac{10}{-2} = -5$$

$$\text{Si } F = 18 = h^2 + k^2 - R^2 \Rightarrow R = \sqrt{3^2 + (-5)^2 - 18} = 4$$

Con esos datos podemos escribir la ecuación canónica de la circunferencia:

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4^2$$

Es decir que podemos pasar de la ecuación general a la canónica y viceversa.

Ejemplo: dada la ecuación: $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4^2$

Hallar la ecuación general.

Solución:

De observar la ecuación deducimos que $h = 3$ $k = -5$ y Radio = 4

$$\text{Si } D = -2h \Rightarrow D = -2 \times 3 = -6$$

$$\text{Si } E = -2k \Rightarrow E = -2 \times (-5) = 10$$

$$\text{Si } F = h^2 + k^2 - R^2 \Rightarrow F = 3^2 + (-5)^2 - 4^2 = 9 + 25 - 16 = 18$$

De donde será:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$$

Nota: observemos que el término $F = 18$ está en el primer miembro. En caso de que la ecuación se presentara de la forma:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y = -18$$

con el término (-18) en el segundo miembro, antes de darle valor a F , debemos pasarlo al primer miembro, ya que caso contrario variará el signo.