

Módulo

MATEMÁTICA

FÍSICA Y MATEMÁTICA APLICADA AL DISEÑO INDUSTRIAL

Pablo Almada, Gabriela Arrieta, Soledad Delgado, Fernanda Franciosi,
Claudia Gareca, Gerardo Gnavi, Natalia Motta Milesi, Laura Turu Michel

Compilador: Pablo Almada

FACULTAD DE ARQUITECTURA, URBANISMO Y DISEÑO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba



FAUD

Facultad de Arquitectura,
Urbanismo y Diseño

Cátedra: FÍSICA Y MATEMÁTICA APLICADA AL DISEÑO A

Equipo docente:

Prof. Titular: Pablo Almada

Prof. Adjunta: Claudia Gareca

Prof. Asistentes: Gabriela Arrieta, Soledad Delgado, Fernanda Franciosi,
Gerardo Gnavi, Natalia Motta Milesi, Laura Turu Michel

	ÍNDICE
LONGITUDES, PERÍMETROS Y SUPERFICIES	 01
RAZONES Y PROPORCIONES	 04
TRIGONOMETRÍA	 19
POLÍGONOS	 35
SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL PLANO	 44
SECCIONES CÓNICAS. CIRCUNFERENCIA	 56
POLIEDROS	 66
BIBLIOGRAFÍA	 76

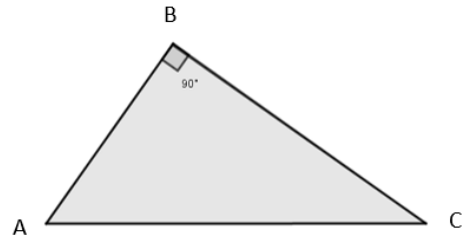
LONGITUDES, PERÍMETROS Y SUPERFICIES

Ejercicio 1

¿Cuál es el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden, respectivamente, 6 cm y 8 cm? Graficar a escala 1:1.

Ejercicio 2

Calcular la medida del lado AB del siguiente triángulo:
Datos: AC = 52 cm; BC = 44 cm



Ejercicio 3

Un cuadrado tiene un perímetro de 96 cm. Calcular:

- La medida del lado.
- La superficie.
- La medida de la diagonal.

Ejercicio 4

La diagonal de un cuadrado es de 10 cm. Calcular:

- La medida del lado.
- El perímetro.
- La superficie.

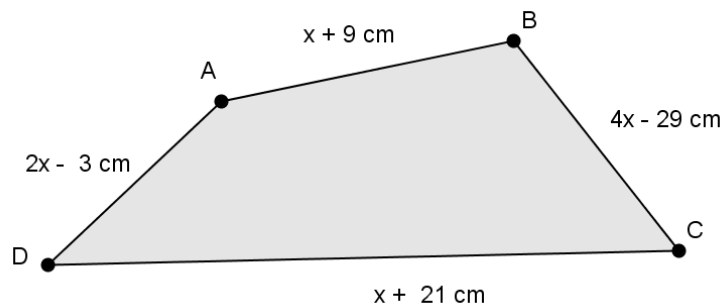
Ejercicio 5

El perímetro de un rectángulo es de 44 cm. Uno de sus lados es de 8,3 cm.

- ¿Cuánto mide el otro lado?
- ¿Cuál es la superficie?
- Calcular el valor de su diagonal.

Ejercicio 6

El perímetro del cuadrilátero de la figura es igual a 1,18 m. Calcular "x" y las medidas de los lados.



Ejercicio 7

¿Qué superficie tiene un rombo cuyas diagonales miden, respectivamente, 5 cm y 8 cm? Graficar a escala 1:1.

Ejercicio 8

Un rectángulo tiene una superficie de 450 cm^2 . Uno de sus lados es el doble del otro.

- ¿Cuánto mide cada lado?
- ¿Cuál es el perímetro?

Ejercicio 9

¿Cuál es el perímetro y la superficie de un círculo de 5 cm de radio?

Ejercicio 10

El perímetro de una circunferencia es de 226,1946711 cm.

- ¿Cuál es su diámetro?
- ¿Cuál es su superficie?

Ejercicio 11

La superficie de un círculo tiene un valor de 176,7145868 m². Calcular el valor del radio y del perímetro del círculo.

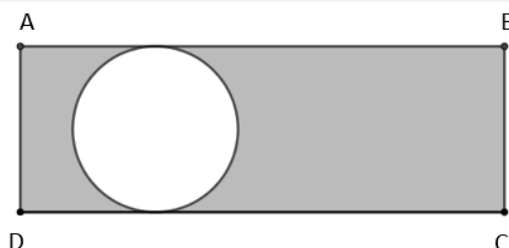
Ejercicio 12

Calcula el perímetro de un terreno rectangular si su superficie es de 226,92 m² y el ancho mide 12,4 m.

Ejercicio 13

¿Cuánto mide la superficie sombreada?

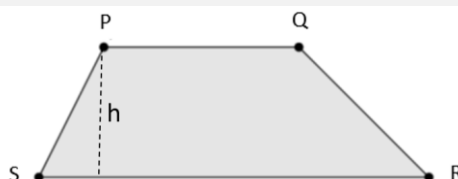
Datos: ABCD rectángulo; AB = 12,6 cm; BC = 4,3 cm

**Ejercicio 14**

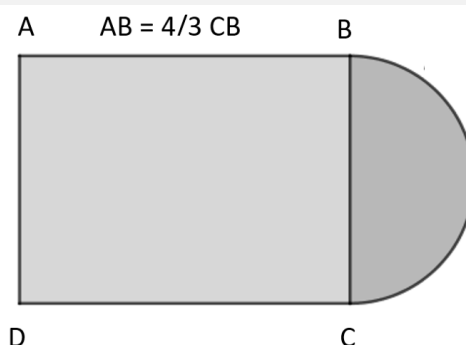
La siguiente figura es un trapecio de bases RS y PQ y altura h = 0,28 cm.

Datos: PQ=0,92 cm; RS = 1,17 cm

¿Cuánto vale la superficie?

**Ejercicio 15**

Con los datos de la figura, calcular la superficie del rectángulo y el perímetro de toda la figura. La superficie del medio círculo es 9,047786842 cm².

**Respuestas ejercicio****Ejercicio 1**

10 cm

Ejercicio 2

AB = 27,71281292 cm

Ejercicio 3

- a) 24 cm
- b) 576 cm^2
- c) 33,9411255 cm

Ejercicio 4

- a) 7,071067812 cm
- b) 28,28427125 cm
- c) 50 cm^2

Ejercicio 5

- a) 13,7 cm
- b) $113,71 \text{ cm}^2$
- c) 16,01811475 cm

Ejercicio 6

$x = 15 \text{ cm}$; $AB = 24 \text{ cm}$; $BC = 31 \text{ cm}$; $CD = 36 \text{ cm}$; $AD = 27 \text{ cm}$

Ejercicio 7

20 cm^2

Ejercicio 8

- a) 15 cm y 30 cm
- b) 90 cm

Ejercicio 9

Perímetro: 31,41592654 cm; superficie: $78,53981634 \text{ cm}^2$

Ejercicio 10

Diámetro: 72 cm; superficie: $4071,504079 \text{ cm}^2$

Ejercicio 11

Radio: 7,5 m; perímetro: 47,1238898 m.

Ejercicio 12

61,4 m

Ejercicio 13

$39,65798796 \text{ cm}^2$

Ejercicio 14

$0,2926 \text{ cm}^2$

Ejercicio 15

Superficie: $30,72 \text{ cm}^2$; perímetro: 25,13982237 cm

RAZONES Y PROPORCIONES

I. MARCO TEÓRICO

1. Razón
2. Proporción
3. Módulo de un rectángulo
 - 3.1. Clasificación de los rectángulos según su módulo
 - 3.1.1. Rectángulos estáticos
 - 3.1.2. Rectángulos dinámicos
4. Sobre el formato papel y sus proporciones
5. Escala

II. EJERCICIOS

III. AUTOEVALUACIÓN

I. MARCO TEÓRICO

1. Razón

Dados dos números “a” y “b” se denomina **razón**, al cociente establecido entre los mismos, siendo “a” el *antecedente* y “b” el *consecuente*.

$$r = \frac{a}{b}$$

Son ejemplos de razones:

- $\frac{10}{2} = 5$
Es decir que la relación entre 10 y 2 es igual a 5, que el 10 contiene 5 veces al 2 o que el 10 contiene 2 veces al 5.
- $\frac{3}{4} = 0,75$
Es decir que la relación entre 3 y 4 es igual a 0,75, que el 3 contiene 0,75 veces al 4 o que el 3 contiene 4 veces al 0,75.
- $\frac{1}{100} = 0,01$
Puede leerse como 1 en 100. Interpretado como escala de representación gráfica, podemos afirmar que 1 unidad de dibujo representa 100 de la realidad, es decir, lo dibujado es 100 veces más pequeño que lo real. Si multiplicamos cualquier longitud por la razón 0,01 reduciremos las mismas 100 veces respecto de la longitud inicial.

2. Proporción

Cuatro números, sean estos “a”, “b”, “c” y “d” forman una **proporción**, cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos, siendo “a” y “d” los *extremos* y “b” y “c” los *medios* de la proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por la **propiedad fundamental de las proporciones** se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Son ejemplos de proporciones:

- $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, que se lee 2 es a 5 como 6 es a 15. La razón entre 2 y 5 es la misma que entre 6 y 15 y es igual a 0,4.

- Si tomamos las medidas de dos tableros con forma de rectángulos semejantes podrá verificarse, por ejemplo, que el lado mayor del primero es al lado mayor del segundo como el lado menor del primero es al lado menor del segundo (I) o, que el lado mayor del primero es a su lado menor como el lado mayor del segundo es a su lado menor (II). Si el tablero mayor mide 150 cm por 50 cm y el menor 120 cm por 40 cm, las proporciones I y II son:

$$(I) \quad \frac{150}{120} = \frac{50}{40} \quad \text{Se verifica que 120 por 50 es igual a 150 por 40}$$

$$(II) \quad \frac{150}{50} = \frac{120}{40} \quad \text{Se verifica que 50 por 120 es igual a 150 por 40}$$

3. Módulo de un rectángulo

El **rectángulo** es una de las figuras geométricas que encontramos frecuentemente en el diseño de objetos. Es una figura plana, cuadrilátera, cuyos lados no adyacentes son paralelos e iguales, y sus lados adyacentes forman siempre un ángulo recto.

Cada rectángulo posee un **módulo (M)**, que es la razón entre su **lado mayor (L)** y su **lado menor (l)** y siempre mayor a 1.



$$M = \frac{\text{LADO MAYOR (L)}}{\text{lado menor (l)}} > 1$$

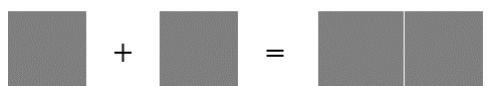
Dos rectángulos son proporcionales si poseen el mismo **módulo**, es decir que existen infinitos rectángulos que poseen el mismo módulo y, por lo tanto, son semejantes. Por ejemplo, un rectángulo de 6 cm por 2 cm, es semejante a otro mayor de 12 cm por 4 cm, o a otro menor de 1,5 cm por 0,5 cm, ya que todos poseen módulo igual a 3.

3.1. Clasificación de los rectángulos según su módulo

Los rectángulos pueden clasificarse en **estáticos** y **dinámicos** según su módulo sea un número racional o irracional.

3.1.1. Rectángulos estáticos

En los **rectángulos estáticos (de proporciones racionales)** el módulo de la figura es un número racional, es decir, un número que puede expresarse como el cociente entre dos números enteros. Los rectángulos graficados a continuación ejemplifican los módulos: $M=2$, $M=3$, $M=2,5$, $M=1,5$ y $M=1,333...$



$$1 + 1 = \text{Módulo} = 2/1 = 2$$

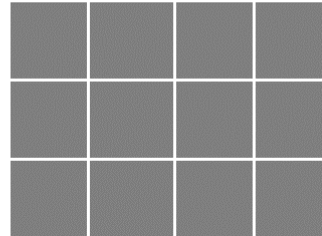


$$1 + 1 + 1 = \text{Módulo} = 3/1 = 3$$

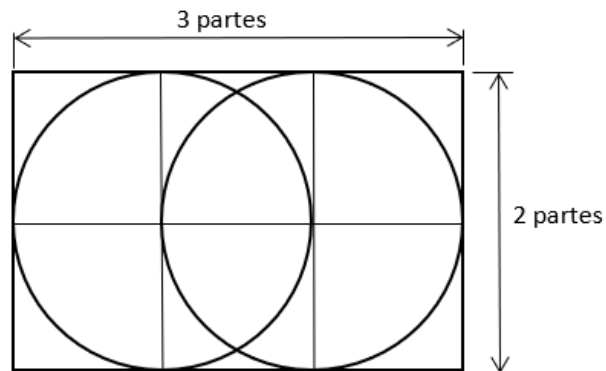
$$\begin{array}{c} \text{■} + \text{■} + \text{■} = \text{■} \text{■} \text{■} \\ 1 + 1 + 0,5 \quad \text{Módulo} = 2,5/1 = 2,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{■} \text{■} \text{■} \\ \text{■} \text{■} \text{■} \end{array} \quad \text{Módulo} = 3/2 \text{ o sea } M = 1,5$$

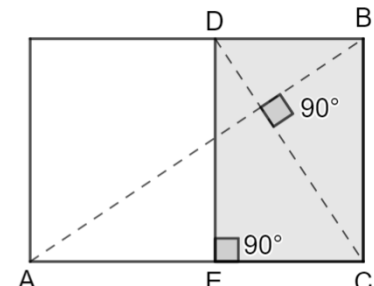
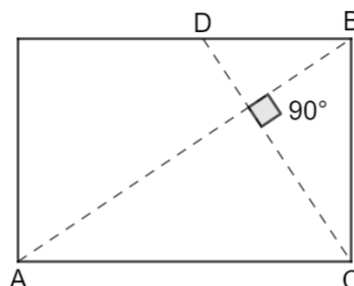
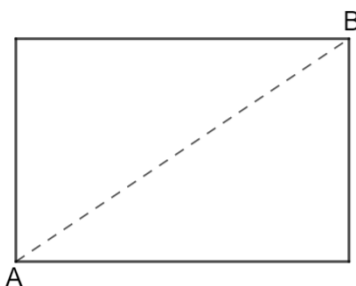
$$\text{Módulo} = 4/3 \text{ o sea } M = 1,333...$$



Un rectángulo estático particular es aquel que tiene módulo igual $3/2$, denominado Rectángulo Egipcio. Posee la propiedad de contener en su interior el símbolo llamado **Vesica Piscis**, producto de la intersección de dos círculos de radios idénticos, cuyos centros son los extremos de un segmento de longitud igual al radio.



El procedimiento para subdividir un rectángulo de manera tal de obtener un nuevo rectángulo que posea la misma proporción que el rectángulo original consiste en trazar una de las diagonales de la figura (AB), dibujar un segmento perpendicular a dicha diagonal (CD) que pase por uno de los vértices opuestos (C) y, desde D, trazar un segmento perpendicular al lado AC hasta E. El nuevo rectángulo BCED es semejante al rectángulo original.



3.1.2. Rectángulos dinámicos

En los **rectángulos de proporciones irracionales o dinámicas** el módulo de la figura es un número irracional, es decir aquel número que no puede expresarse como el cociente entre dos números enteros, y posee infinitas cifras decimales no periódicas. Son ejemplos $M = \sqrt{2}$, $M = \sqrt{3}$ y $M = \phi$ (número de oro).

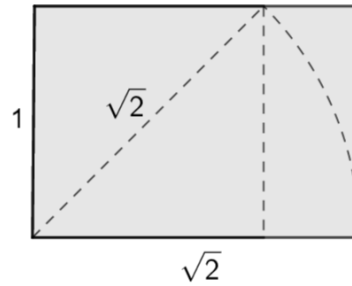
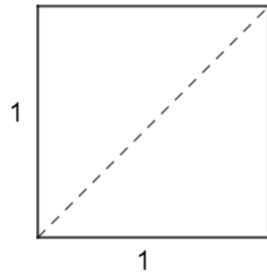
- El rectángulo de **módulo** $\sqrt{2}$ se obtiene a partir de la diagonal de un cuadrado de lado igual a la unidad tal como se observa en las imágenes que siguen.

$$D^2 = 1^2 + 1^2$$

$$D = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$D = \sqrt{2}$$

$$D = L$$



$$L = \sqrt{2}$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

- El rectángulo de **módulo $\sqrt{3}$** se obtiene a partir de la diagonal de un rectángulo de módulo $\sqrt{2}$.

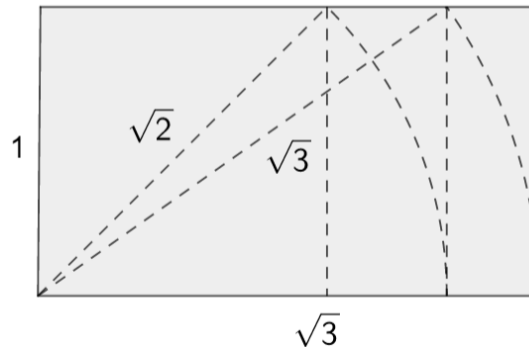
$$D^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$D = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}$$

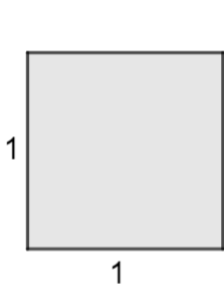
$$D = \sqrt{3}$$

$$D = L$$

$$M = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



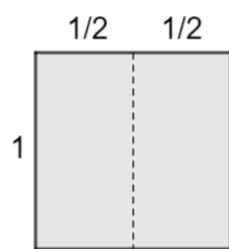
- El rectángulo de **módulo igual al número de oro** ($M = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618 \dots$) se obtiene a partir de un cuadrado sobre el cual se opera hasta obtener el rectángulo de oro de proporción áurea (o divina proporción). Dicha proporción ha sido de interés en el campo del diseño ya que se asocia a la idea de armonía y belleza. Es representado por la letra griega Φ (fi), en honor al escultor griego Fidias, y es un número irracional que posee muchas propiedades interesantes. Fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o proporción entre partes de un todo. A continuación, se presenta el procedimiento gráfico y analítico a partir del cual se obtiene el rectángulo de proporción áurea.



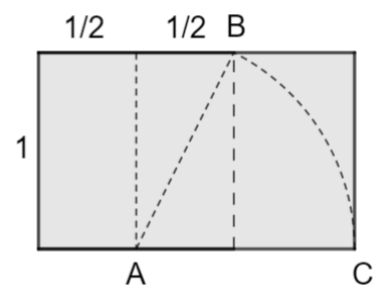
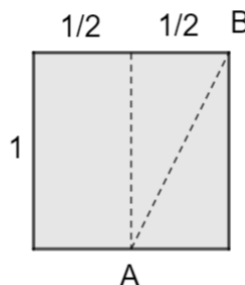
$$l = 1$$

$$L = \frac{1}{2} + \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$



$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \overline{AC}$$



$$L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618 \dots = \phi$$

$$M = \frac{\phi}{1} = \phi$$

4. Sobre el formato papel y sus proporciones

Los tamaños de los diversos formatos de papel que utilizamos a diario están normalizados, es decir, sus medidas están definidas por una norma. La norma [ISO 216](#), basada en la norma [DIN 476 \(1922\)](#) es la que rige el formato del papel en gran parte del mundo en la actualidad, en coexistencia con otros formatos propios de otras normas.

La norma mencionada pretende un máximo aprovechamiento del papel y abarca tres series básicas, denominadas A, B y C. Las series quedan definidas a partir de la relación entre los lados que es una constante en cada una de ellas. El cociente entre el lado mayor (L) y el lado menor (l) de cada una de las hojas es igual a la raíz cuadrada de 2, cada formato posee la mitad de superficie que la hoja de tamaño inmediato superior, y el lado menor de es igual a la mitad del lado mayor del formato inmediato superior.

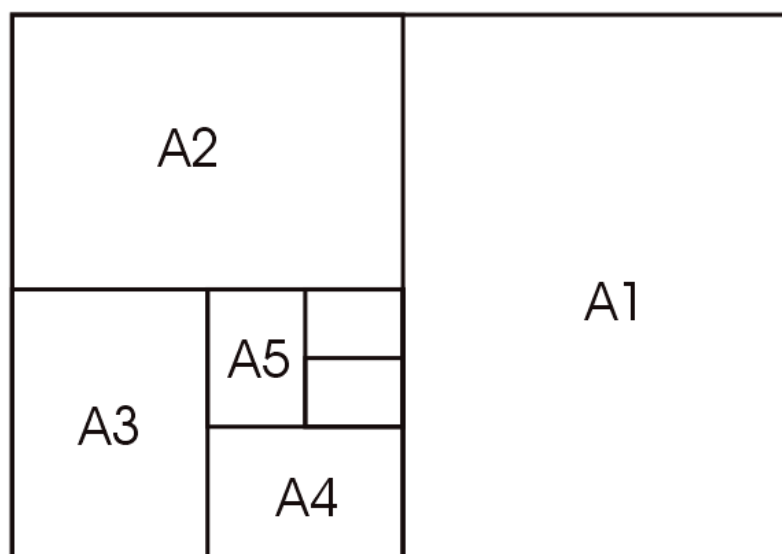
La serie A, la que utilizamos comúnmente, parte de un formato base A0 que cumple con dos condiciones:

- Posee un metro cuadrado de superficie.
- La relación entre sus lados es igual a raíz cuadrada de dos.

Las siguientes divisiones, que reducen el tamaño del papel a la mitad a partir de cortes sucesivos, se denominan A1, A2, A3, A4... La letra A indica la serie y el número que la acompaña la cantidad de cortes realizados para obtenerla a partir del A0. El siguiente cuadro muestra las dimensiones de los lados (expresados en mm) de las hojas de la serie A y la relación entre los mismos ($\sqrt{2}$). Todos los rectángulos son proporcionales ya que la relación entre los lados permanece constante.

Formato	Lado mayor	Lado menor	Proporción
A0	1189	841	$1189/841 \cong \sqrt{2}$
A1	841	594	$841/594 \cong \sqrt{2}$
A2	594	420	$594/420 \cong \sqrt{2}$
A3	420	297	$420/297 \cong \sqrt{2}$
A4	297	210	$297/210 \cong \sqrt{2}$
A5	210	148	$210/148 \cong \sqrt{2}$
A6	148	105	$148/105 \cong \sqrt{2}$
A7	105	74	$105/74 \cong \sqrt{2}$
A8	74	52	$74/52 \cong \sqrt{2}$
A9	52	37	$52/37 \cong \sqrt{2}$
A10	37	26	$37/26 \cong \sqrt{2}$

A0



5. Escala

La **escala** alude tanto al tamaño de un objeto comparado con un estándar de referencia o con el de otro objeto, como a la manera de percibir o juzgar el tamaño de dicho objeto. Así, podemos hablar de **escala de representación** y **escala visual**.

La **escala de representación** es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las dimensiones del dibujo que representan la realidad (existente o proyectada) sobre un mapa o plano. Se escriben en forma de razón, en donde el antecedente o numerador representa la medida del dibujo y el consecuente o denominador representa la medida del objeto real. Por ejemplo:

- Esc. 1:10 (se lee escala uno en diez y significa que 1 unidad de dibujo representa 10 unidades de la realidad).
- Esc. 2:1 (se lee escala dos en uno y significa que 2 unidades de dibujo representan 1 unidad de la realidad).

La escala de representación se clasifica en:

- **Natural**: las dimensiones representadas en el dibujo son iguales a las de la realidad. Numéricamente, se representa de la siguiente forma Esc. 1:1.
- De **reducción**: las dimensiones representadas en el dibujo son menores a las dimensiones del objeto real. Por ejemplo: Esc. 1:2, Esc. 1:5, Esc. 1:10, Esc. 1:50...
- De **ampliación**: las dimensiones representadas en el dibujo son mayores que las del objeto real. Por ejemplo: Esc. 2:1, Esc. 5:1, Esc. 10:1...

< natural

proyecto

Esc. 1:1

< de reducción

proyecto

Esc. 1:2

< de ampliación

proyecto

Esc. 2:1

La **escala visual** se refiere al tamaño menor o mayor en que algo se presenta en relación a las dimensiones que usualmente le son propias o a las de otros objetos de su contexto. Como puede observarse en la imagen de la izquierda, el tamaño del objeto no puede inferirse ya que no se cuenta con un elemento de referencia. En la imagen de la derecha, el objeto se asocia a la mano y a partir de ella se establecen las medidas aproximadas.



II. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Se desea dibujar un rectángulo cuyas medidas reales son 12,5 cm por 48,6 cm. Si la escala utilizada es 1:2,5 ¿Cuáles son las **medidas del rectángulo representado**?

Ejercicio 2

Las medidas reales de un rectángulo son 6,2 m por 7,1 m. Si es representado por un rectángulo cuyas medidas en el dibujo son 12,4 cm por 14,2 cm ¿Cuál es la **escala** utilizada?

Ejercicio 3

Las medidas de un rectángulo dibujado en un plano son 2,05 cm por 2,25 cm. Si la escala utilizada es 1:5: ¿cuáles son las **medidas reales del rectángulo**?

Ejercicio 4

Completar la siguiente tabla relativa al módulo y la superficie de diferentes rectángulos. Medidas en cm.

Rectángulo	Lado mayor	Lado menor	Módulo	Superficie
R1	32	25		
R2	33	12		
R3	22		1,83	
R4	29		2,9	
R5		22	1,318	
R6		15	2	
R7			1,4	315 cm ²
R8			$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	200 cm ²

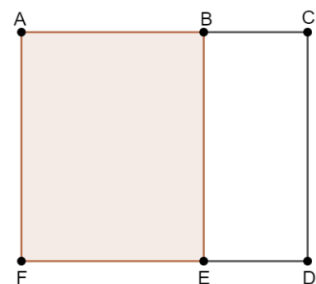
Ejercicio 5

Un rectángulo posee módulo igual al número de oro ($M = 1,618$) y su lado menor es igual a 2 cm. **Calcular el perímetro del rectángulo.**

Ejercicio 6

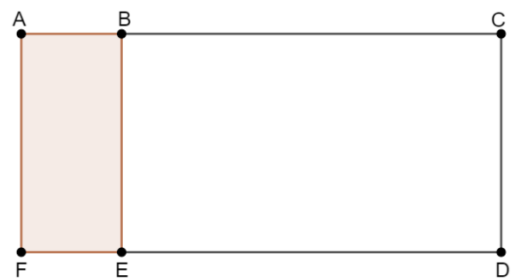
Una bandeja posee forma rectangular. El rectángulo ACDF posee módulo igual a 1,25 y está subdividida en 2 rectángulos, tal como muestra la figura. El lado AC mide 87,5 cm.

Calcular la superficie del rectángulo ABEF (sombreado) que posee igual módulo que el rectángulo ACDF.



Ejercicio 7

Un tablero posee forma rectangular. El rectángulo ACDF posee módulo igual a 2,2 y está subdividido en 2 rectángulos, tal como muestra la figura. El lado AC mide 88 cm. Se pide **calcular la longitud del segmento AB del rectángulo menor ABEF** (sombreado) que posee igual módulo que el rectángulo ACDF.



Ejercicio 8

Los rectángulos A y B son semejantes y el lado menor de A es igual al lado mayor de B, tal como se ve en la figura adjunta. Ambos poseen módulo igual a 1,5 y el lado mayor del rectángulo A es igual a 48 cm.

Calcular la **superficie del rectángulo B**.



Ejercicio 9

De dos rectángulos se sabe que poseen el mismo módulo ($M = 2$) y que la suma de sus superficies es igual a $42,125\text{m}^2$. Si el lado menor del rectángulo mayor es igual a 4 m, ¿cuál es el valor del resto de los lados?

Ejercicio 10

La presente imagen nos muestra un taburete multifuncional KADA de Yves Behar. Su aspecto sostenible está dado por lo multifuncional y por su empaquetado plano para un volumen de transporte óptimo. Dicho taburete está realizado en madera de abedul laminada y los paneles se enlazan con una cremallera de neopreno. Se desea conocer:

- Las dimensiones del rectángulo (ABCD) que ocupa cuando queda plegado plano sabiendo que el módulo de dicho rectángulo es 1,184210526 y que el lado mayor mide 45 cm.
- Si el rectángulo ABCD es representada por un rectángulo cuyas medidas en el dibujo son 22,5 cm x 19 cm: ¿cuál es la escala utilizada?



Ejercicio 11

En el banco Latino, de Gastón Girod, cada recorte de madera nativa está suspendido sobre un resorte para amoldarse al cuerpo. Si sus dimensiones son: 200 cm de largo, 50 cm de ancho y 40 cm de alto.

Calcular:

- El módulo del rectángulo de asiento (largo por ancho).
- ¿Cuáles serán las dimensiones del dibujo del asiento (largo por ancho) si es representado en escala 1:10?



Ejercicio 12

La Biblioteca Equilibrium, de Alejandro Gómez Stubbs, se compone de cinco módulos realizados en aglomerado y chapa de madera y acero. El rectángulo inferior (R1) mide 50 cm por 20 cm, mientras que el superior (R2) mide 20 cm por 10 cm. Se pide:

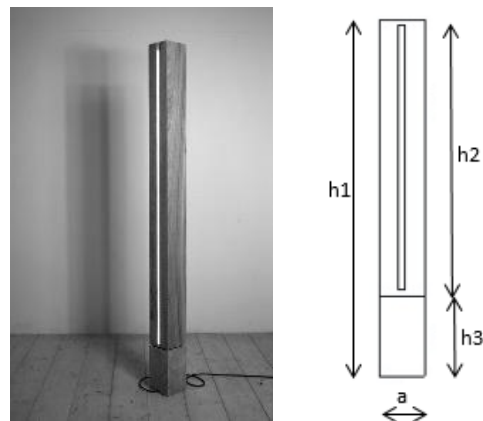
- Calcular el módulo de ambos rectángulos (R1 y R2).
- Si del rectángulo menor (R2) se mantiene la longitud de su lado mayor: ¿cuánto deben medir su lado menor para que ambos rectángulos sean proporcionales?



Ejercicio 13

La siguiente imagen nos muestra la lámpara de pie led diseñada por Alessandro Soliani, realizada en madera de olmo viejo sin pulir y base de hormigón. La altura total (h_1) de la luminaria es de 160 cm y el ancho (a) es de 20 cm.

- Si las longitudes h_2 y h_3 indicadas en el gráfico se dividen a razón de $7/2$: ¿cuáles serán las medidas de h_2 y h_3 ?
- Definir si el rectángulo correspondiente al cuerpo de la luminaria (h_2 por a) es proporcional al rectángulo de la base (h_3 por a).

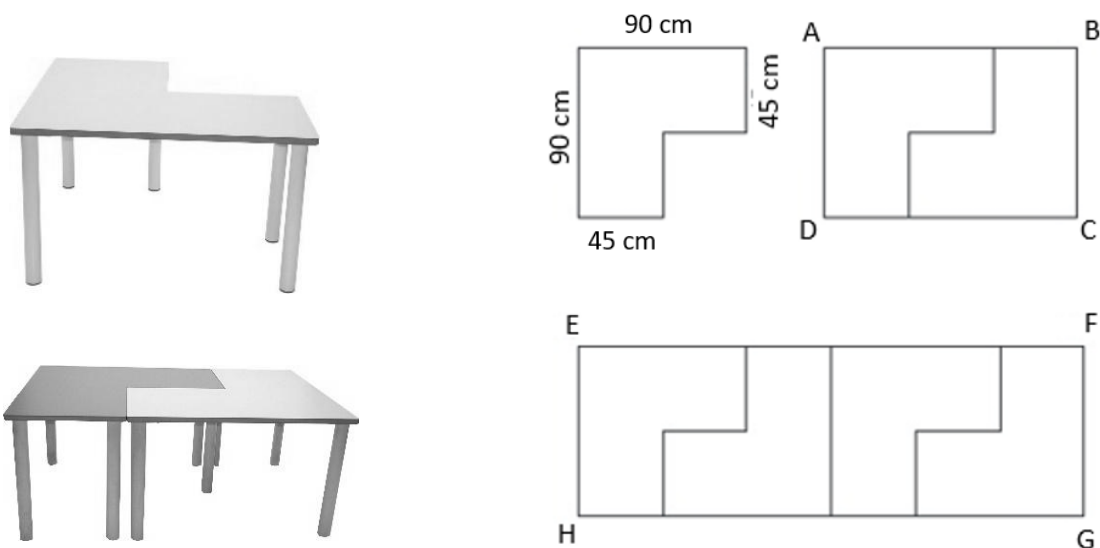


Ejercicio 14

Las imágenes nos muestran un conjunto de mesas infantiles de la línea Guay. Este conjunto, de diseño ergonómico, se ha fabricado especialmente para la utilización en guarderías. Está disponible en cuatro alturas, ya que se tuvo en cuenta la normativa que considera la altura del niño/a de 1 a 2 años (40 cm), de 2 a 3 años (46 cm), de 3 a 4 años (56 cm) y de 4 a 6 años (59 cm). Sus dimensiones están indicadas en el gráfico. El diseño en "L" permite varias disposiciones en el espacio como áreas de trabajo.

Se pide:

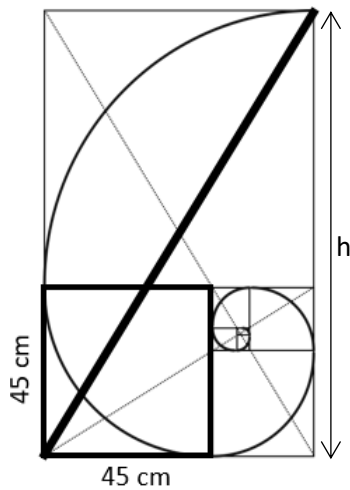
- Determinar el módulo de los rectángulos ABCD y EFGH a partir de los datos incluidos en la representación gráfica. ¿Son rectángulos semejantes?
- Establecer la relación entre el área mayor y el área menor de los rectángulos.



Ejercicio 15

La silla "Áurea", fue diseñada por el Arq. Federico Mauro Costa (2009). Su diseño está basado íntegramente en la proporción áurea, lo cual justifica su valor estético y relaciona al objeto con la naturaleza y su belleza. Los dos marcos metálicos fijados por tres puntos y el asiento de madera conforman un cubo, el cual es entrelazado por un respaldo plano. A su vez, el respaldo gira en el punto de fijación inferior y al ubicarse excéntrico en la base ofrece dos inclinaciones diferentes. En una de las posiciones, el respaldo brinda la función de silla de comedor y en la otra posición se transforma en una silla de descanso. En su representación gráfica se puede observar la utilización de la proporción áurea.

Calcular la altura del respaldar de la silla (h) cuando está en posición de silla de descanso tal como se indica en la imagen.



Respuestas ejercicios

Ejercicio 1

5 cm y 19,44 cm

Ejercicio 2

Escala 1:50

Ejercicio 3

10,25 cm por 11,25 cm

Ejercicio 4

Rectángulo	Lado mayor	Lado menor	Módulo	Superficie
R1	32	25	1,28	800 cm ²
R2	33	12	2,75	396 cm ²
R3	22	12	1,83	264 cm ²
R4	29	10	2,9	290 cm ²
R5	28,996	22	1,318	637,912 cm ²
R6	30	15	2	450 cm ²
R7	21	15	1,4	315 cm ²
R8	17,9890744	11,11785941	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	200 cm ²

Ejercicio 5

10,472 cm

Ejercicio 6

70 cm x 56 cm = 3920 cm²

Ejercicio 7

18,18 cm

Ejercicio 8

682,6 cm²

Ejercicio 9

Rectángulo mayor: $L = 8 \text{ cm}$ y $l = 4 \text{ cm}$ / Rectángulo menor: $L = 4,5 \text{ cm}$ y $l = 2,25 \text{ cm}$

Ejercicio 10

- a) 45 cm por 38 cm.
- b) Escala 1:2.

Ejercicio 11

- a) $M = 4$.
- b) 20 cm por 5 cm.

Ejercicio 12

- a) Módulo rectángulo mayor: $M = 2,5$ / Módulo rectángulo menor: $M = 2$
- b) El rectángulo superior deberá medir 20 cm por 8 cm.

Ejercicio 13

- a) $h_2 = 124,4 \text{ cm}$ y $h_3 = 35,5 \text{ cm}$
- b) No son proporcionales

Ejercicio 14

- a) Rectángulo ABCD: $M = 1,5$ / Rectángulo EFGH: $M = 3$ / No son rectángulos semejantes
- b) La razón del área mayor al área menor es igual a 2.

Ejercicio 15

$h = 117,8115295 \text{ cm}$

III. AUTOEVALUACIÓN

- 1) ¿Qué es una razón?
 - a) La suma de dos números.
 - b) El producto de dos números.
 - c) El cociente entre dos números.
 - d) La diferencia entre dos números.
- 2) En la razón a/b , ¿cómo se denomina al número “a”?
 - a) Consecuente.
 - b) Antecedente.
 - c) Medio.
 - d) Extremo.
- 3) ¿Cuál de las siguientes razones es equivalente a $3/4$?
 - a) $9/12$
 - b) $6/5$
 - c) $12/15$
 - d) $2/5$
- 4) ¿Qué condición se cumple en una proporción?
 - a) La suma de medios y extremos es igual.
 - b) El producto de los medios es igual al producto de los extremos.
 - c) Los medios siempre son números iguales.
 - d) Los extremos siempre son números enteros.
- 5) En la proporción $2/5 = 6/15$, ¿qué valor tienen los extremos?
 - a) 2 y 15
 - b) 2 y 5
 - c) 6 y 15
 - d) 5 y 6
- 6) El módulo de un rectángulo se define como:
 - a) La suma de sus lados.
 - b) La diferencia entre el lado mayor y menor.
 - c) El cociente entre el lado mayor y el lado menor.
 - d) El área del rectángulo.
- 7) ¿Qué característica deben cumplir dos rectángulos para ser semejantes?
 - a) Tener igual perímetro.
 - b) Tener igual superficie.
 - c) Tener igual módulo.
 - d) Tener lados congruentes.
- 8) Los rectángulos con módulo racional se denominan:
 - a) Áureos.
 - b) Dinámicos.
 - c) Estáticos.
 - d) Irregulares.
- 9) ¿Qué rectángulo estático particular posee módulo $3/2$?
 - a) Rectángulo áureo.
 - b) Rectángulo egipcio.

- c) Rectángulo $\sqrt{2}$.
 - d) Rectángulo $\sqrt{3}$.
- 10) En los rectángulos dinámicos, el módulo es:
- a) Un número natural.
 - b) Un número entero.
 - c) Un número irracional.
 - d) Un número fraccionario.
- 11) ¿Cuál es el valor aproximado del número áureo (ϕ)?
- a) 1,414
 - b) 1,5
 - c) 1,618
 - d) 3,14
- 12) ¿Qué nombre recibe la escala en la que las dimensiones del dibujo son mayores que las del objeto real?
- a) Escala natural.
 - b) Escala de reducción.
 - c) Escala de ampliación.
 - d) Escala visual.
- 13) ¿Qué propiedad cumplen todos los rectángulos de la serie A de papel (A0, A1, A2...)?
- a) Son semejantes porque mantienen la misma proporción de lados.
 - b) Son cuadrados perfectos.
 - c) Tienen siempre la misma superficie.
 - d) Sus lados se relacionan con el número áureo.
- 14) ¿Qué proporción tienen los lados de los papeles de la serie A (ej. A4, A3)?
- a) $\sqrt{3}$
 - b) $\sqrt{5}$
 - c) $\sqrt{2}$
 - d) Número áureo.
- 15) ¿Qué superficie tiene el formato A0 según la norma ISO 216?
- a) 1 dm²
 - b) 1 cm²
 - c) 1 m²
 - d) 10 m²
- 16) ¿Qué ocurre con el área del papel al pasar de un formato A(n) a A(n+1)?
- a) Se duplica.
 - b) Se reduce a la mitad.
 - c) Se mantiene constante.
 - d) Se multiplica por $\sqrt{2}$.
- 17) ¿Cómo se expresa la escala de representación?
- a) Como una suma.
 - b) Como un producto.
 - c) Como una diferencia.
 - d) Como una razón.
- 18) Una escala 1:10 significa que:

- a) 10 unidades en el dibujo representan 1 en la realidad.
- b) 1 unidad en el dibujo representa 10 en la realidad.
- c) El objeto es más grande en el dibujo.
- d) El objeto tiene el mismo tamaño real.

19) ¿Cuál de estas escalas corresponde a una reducción?

- a) 2:1
- b) 5:1
- c) 1:5
- d) 1:1

20) ¿Qué tipo de escala es 1:1?

- a) Reducción.
- b) Ampliación.
- c) Natural.
- d) Visual.

Respuestas autoevaluación

- 1) c) El cociente entre dos números.
- 2) b) Antecedente.
- 3) a) 9/12
- 4) b) El producto de los medios es igual al producto de los extremos.
- 5) a) 2 y 15
- 6) c) El cociente entre el lado mayor y el lado menor.
- 7) c) Tener igual módulo.
- 8) c) Estáticos.
- 9) b) Rectángulo egipcio.
- 10) c) Un número irracional.
- 11) c) 1,618
- 12) c) Escala de ampliación.
- 13) a) Son semejantes porque mantienen la misma proporción de lados.
- 14) c) $\sqrt{2}$
- 15) c) 1 m²
- 16) b) Se reduce a la mitad.
- 17) d) Como una razón.

18) b) 1 unidad en el dibujo representa 10 en la realidad.

19) c) 1:5

20) c) Natural.

TRIGONOMETRÍA

I. MARCO TEÓRICO

1. Trigonometría

1.1. Razones trigonométricas directas

1.2. Teoremas para la resolución de triángulos

2. Sistemas de medición de ángulos

2.1. Sistema sexagesimal

2.2. Sistema radial a circular

3. Elementos notables de un triángulo

3.1. Bisectrices de un triángulo

3.2. Mediatrices de un triángulo

3.3. Alturas de un triángulo

3.4. Medianas de un triángulo

4. Pendiente

II. EJERCICIOS

III. AUTOEVALUACIÓN

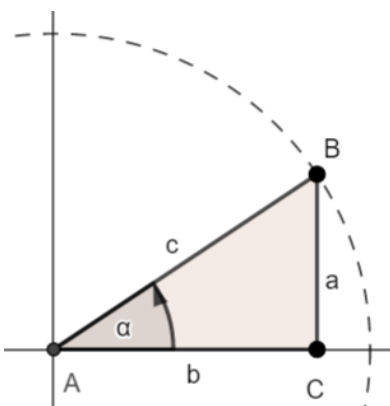
I. MARCO TEÓRICO

1. Trigonometría

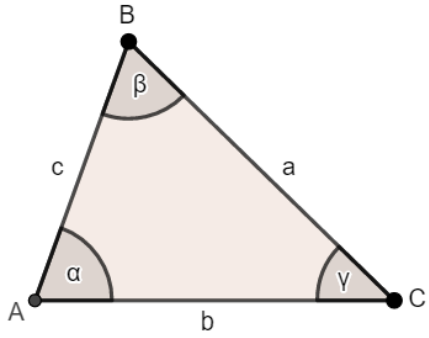
La **Trigonometría** es la rama de la matemática que estudia las relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo inscripto en una circunferencia. Para ello, se han definido las razones trigonométricas directas (seno, coseno y tangente) y sus recíprocas (cosecante, secante y cotangente). Las mismas nos permiten conocer el valor de todos los elementos de un triángulo rectángulo a partir de algunos datos.

Como observamos en la figura de la tabla, el triángulo rectángulo ABC es asociado a un sistema de referencias en el plano en donde el centro de la circunferencia que contiene a uno de sus vértices (B) coincide con otro de los vértices (A). De esta manera, el radio de la circunferencia AB es la hipotenusa del triángulo rectángulo y sus catetos (AC y BC) se disponen en coincidencia con los ejes cartesianos. A partir de estos elementos, podemos definir las **razones trigonométricas directas** que usaremos en esta unidad: seno, coseno y tangente.

1.1. Funciones trigonométricas directas

$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$	$\overline{BC}$ = Cateto Opuesto $\overline{AB}$ = Hipotenusa	
$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$	$\overline{BC}$ = Cateto Adyacente $\overline{AB}$ = Hipotenusa	
$\text{tan } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$	$\overline{BC}$ = Cateto Opuesto $\overline{AC}$ = Cateto Adyacente	

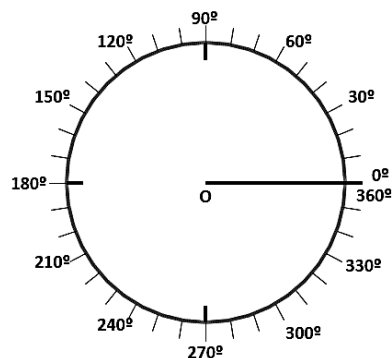
Teoremas para la resolución de triángulos

Teorema Fundamental	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	
Teorema del Coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$	
Teorema del Seno	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$	

2. Sistemas de medición de ángulos

Un ángulo es una figura geométrica determinada por dos planos o dos rectas que se cortan entre sí. Estudiaremos dos sistemas de medición de ángulos: sexagesimal y radial (o circular).

2.1. Sistema Sexagesimal: la unidad de medida es el grado sexagesimal.



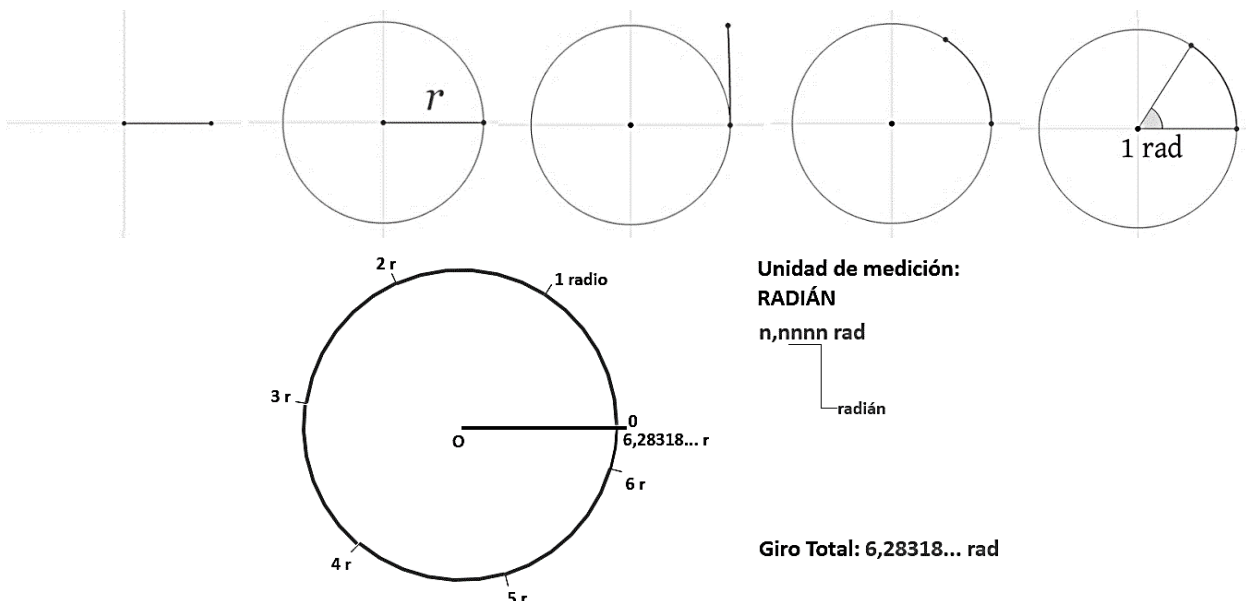
Unidades de medición:

n° nn' nn''
 └──┬──┬──
 minutos segundos
 grados

$1^\circ = 60'$
 $1' = 60''$
 $1^\circ = 3600''$
Giro Total: 360°

Ejemplo: $128^\circ 45' 58''$ (forma compleja) = $128,7661111^\circ$ (forma incompleja)

2.2. Sistema Radial o Circular: la unidad de medida es el radián (representa el ángulo central en una circunferencia y abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio).



Unidad de medición:

RADIÁN

$n,nnnn$ rad
 └──┬──
 radián

Giro Total: 6,28318... rad

Ejemplo: $3/2 \pi \text{ rad} = 4,71238898 \text{ rad}$

La **equivalencia** entre los dos sistemas está dada por la fórmula:

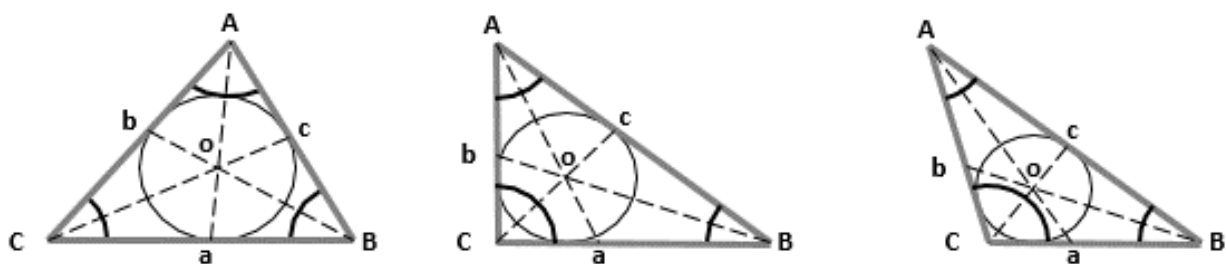
$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha \text{ rad}}{2 \pi \text{ rad}}$$

Ángulo	Sistema Sexagesimal	Sistema Radial
Recto	90°	$\pi/2$ rad
Llano	180°	π rad
$\frac{3}{4}$ giro	270°	$3/2 \pi$ rad
1 giro	360°	2π rad

3. Elementos notables de un triángulo

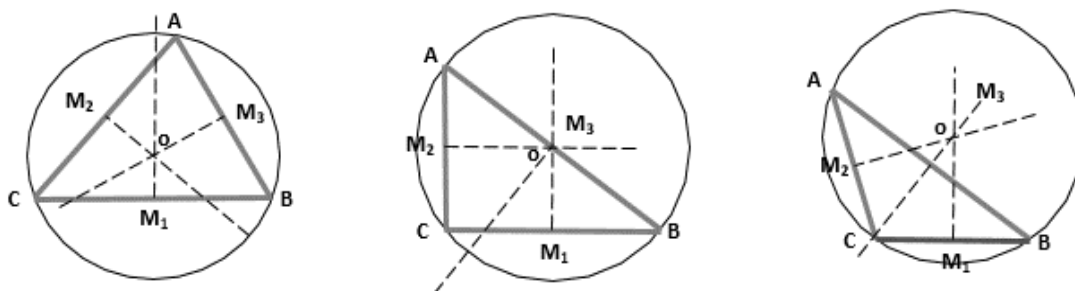
Los elementos notables de un triángulo son aquellos puntos, rectas o circunferencias definidos en relación a los triángulos que poseen propiedades geométricas salientes. Su conocimiento permite operar con los triángulos a partir del reconocimiento de sus elementos estructurales.

3.1. Bisectrices de un triángulo



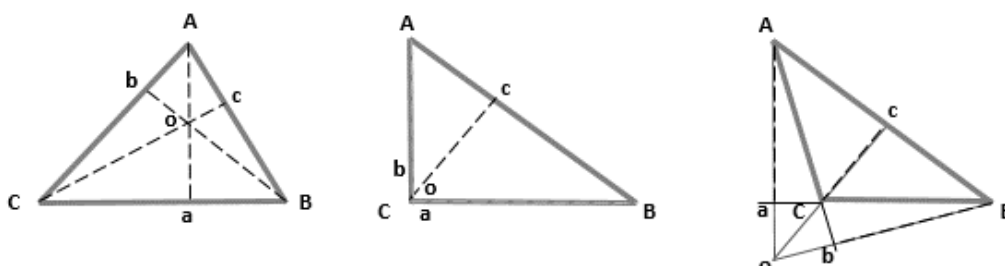
Las **bisectrices** de un ángulo son las semirrectas con origen en cada uno de los vértices de los ángulos interiores que los dividen en dos ángulos de igual medida. Las mismas se cortan en un punto interior que equidista de sus lados. El punto de intersección "o" se denomina **incentro**. La circunferencia de centro "o" es tangente a los lados del triángulo.

3.2. Mediatrices de un triángulo



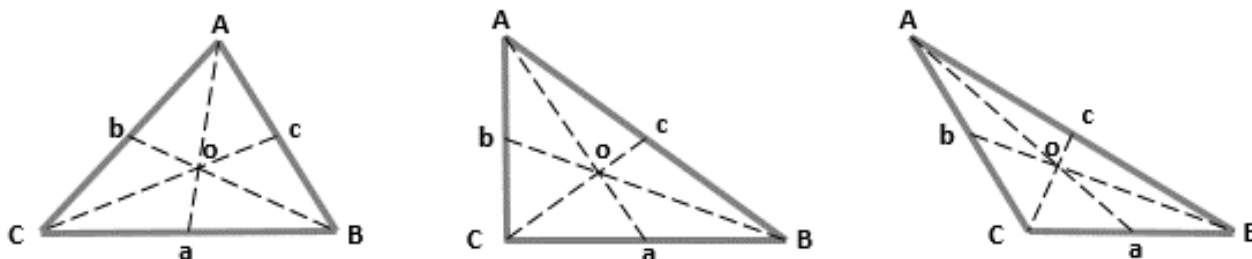
Las **mediatrices** de un triángulo son rectas perpendiculares a cada uno de los lados trazadas en sus puntos medios. El punto de intersección "o" se denomina **circuncentro**. Los vértices del triángulo son puntos que pertenecen a la circunferencia de centro "o".

3.3. Alturas de un triángulo



Las **alturas** de un triángulo son los segmentos que unen cada uno de los vértices con puntos ubicados en los lados opuestos o de sus prolongaciones y son perpendiculares a dichos lados. El punto de intersección "o" se denomina **ortocentro**.

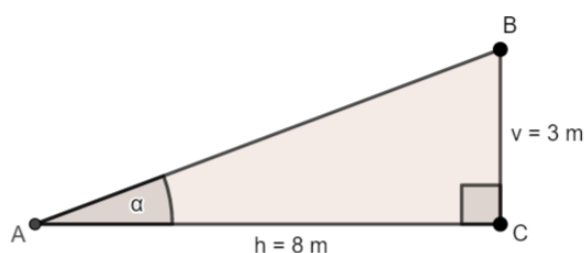
3.4. Medianas de un triángulo



Las **medianas** de un triángulo son los segmentos de rectas trazados desde cada uno de los vértices hasta los puntos medios de sus respectivos lados opuestos. Se cortan en un punto interior cuya distancia a cada vértice es igual a $\frac{2}{3}$ de la mediana correspondiente. El punto de intersección "o" se denomina **baricentro** o centro de gravedad de la figura.

4. Pendiente

La **pendiente** es un concepto que permite medir el grado de inclinación de una recta o una superficie. Es la relación entre la distancia que recorremos verticalmente y la distancia que recorremos horizontalmente cuando subimos una rampa, por ejemplo. En Diseño Industrial, Arquitectura e Ingeniería encontramos pendientes en techos inclinados, caños de desagües, superficies, escaleras, etc.



Existen 2 maneras, equivalentes entre sí, de expresar una pendiente. Lo analizamos a partir del triángulo arriba graficado.

1. Como relación entre distancia vertical y horizontal (o tangente del ángulo de inclinación):

$$\text{Pendiente} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{h} = \frac{3 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 0,375$$

2. Como porcentaje, multiplicando la tangente del ángulo por el 100%.

$$0,375 \cdot 100 \% = 37,5 \% \text{ (significa que, por cada 100 m horizontales, sube 37,5 m)}$$

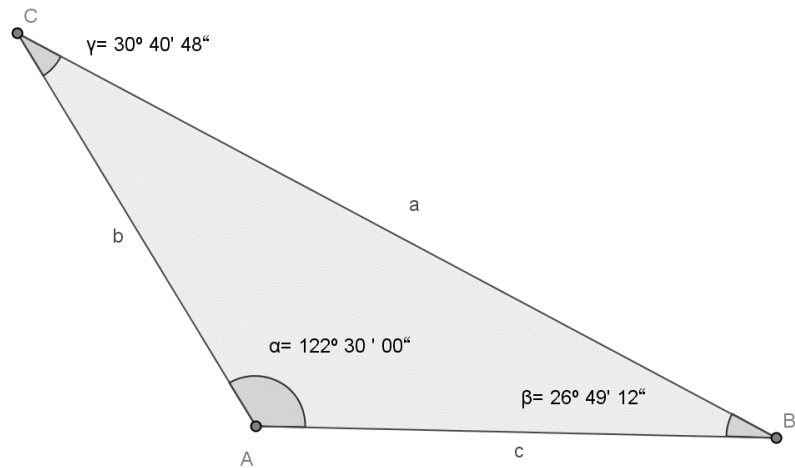
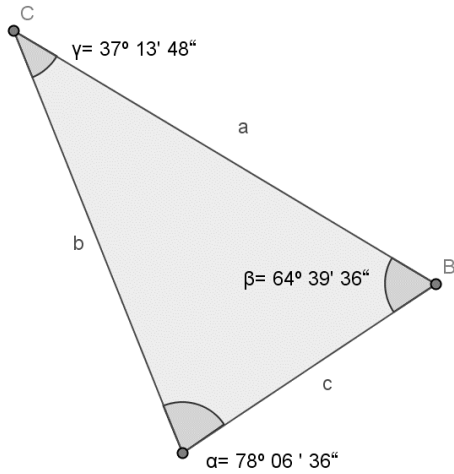
También se puede calcular el ángulo de inclinación a partir de la pendiente con la función arctg . En el ejemplo gráfico es:

$$\alpha = \operatorname{arctg} (0,375); \alpha = 20^{\circ} 33' 21,76''$$

II. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Completar la tabla, realizando el pasaje de los ángulos dados al sistema radial.



Sistema Sexagesimal	Sistema Radial
$78^\circ 06' 36''$	
$37^\circ 13' 48''$	
$64^\circ 39' 36''$	
$30^\circ 40' 48''$	
$122^\circ 30' 00''$	
$26^\circ 49' 12''$	

Ejercicio 2

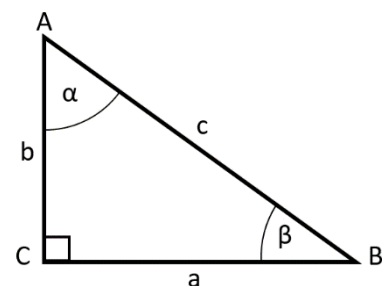
Completar la tabla calculando y expresando todos los ángulos en los dos sistemas de medición.

Ángulo	Sistema Sexagesimal	Sistema Radial
α (alfa)	$77^\circ 54' 36''$	
β (beta)	$38^\circ 39' 36''$	
γ (gamma)		$2,466848364769 \text{ rad}$
δ (delta)		$0,4637339822549 \text{ rad}$

Ejercicio 3

Para el triángulo rectángulo graficado calcular el lado que falta en cada caso, utilizar el teorema de Pitágoras.

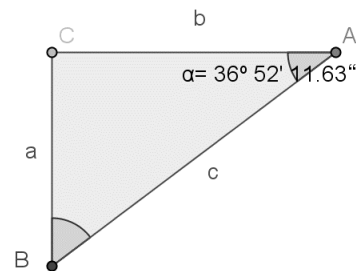
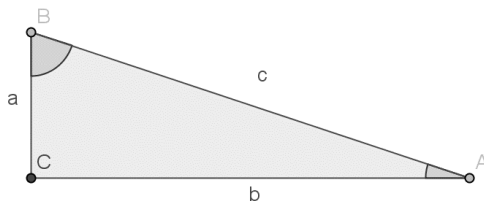
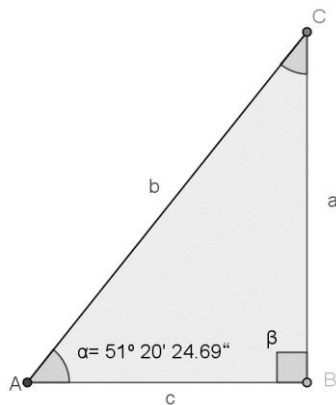
Lados (en m)			Fórmula utilizada
a	b	c	
12	15		
	3	5	
16		$\sqrt{337}$	
	12	13	
8		10	



Ejercicio 4

Para cada triángulo rectángulo, calcular los elementos faltantes (lados o ángulos) según el caso.

Triángulos	Lados (en m)			Ángulos		
	a	b	c	α	β	γ
I	5			$51^{\circ} 20' 24,69''$		
II	2		6,32455532			
III	6			$36^{\circ} 52' 11,63''$		



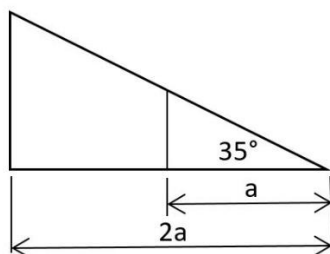
De izq. a der.: triángulos I, II y III de la tabla.

Ejercicio 5

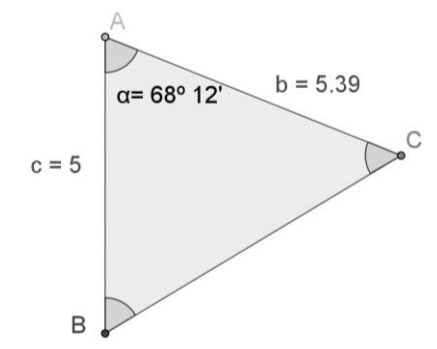
Verificar las longitudes de los lados de cada triángulo del ejercicio anterior aplicando el teorema de Pitágoras.

Ejercicio 6

¿Cuántas veces más grande es la superficie del triángulo mayor respecto del menor sabiendo que $a=20$ cm?

**Ejercicio 7**

De un objeto de forma triangular se sabe que su lado "c" mide 5 cm, que su lado "b" mide 5,39 cm y que el ángulo comprendido entre c y b es igual a $68^{\circ} 12'$. Calcular la superficie del triángulo esquematizado.

**Ejercicio 8**

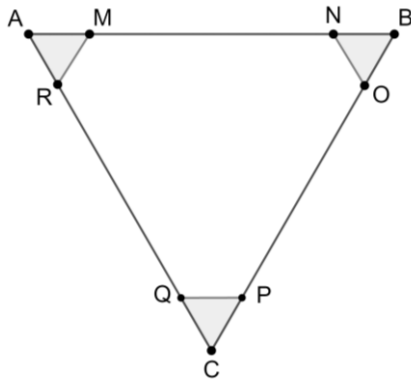
Calcular los valores del lado BC y del ángulo "C" del ejercicio anterior.

Ejercicio 9

Una pieza de forma de triángulo oblicuángulo posee un espesor de 5 mm. Sus lados miden 10 cm, 9 cm y 7,5 cm cada uno. Calcular el volumen de la pieza. Expresar en cm.

Ejercicio 10

El taburete TRES LADOS es un proyecto realizado en la Cátedra de Diseño Industrial 1B y su autora es la estudiante Florencia Bracamonte. Se trata de una estructura filar triangular de madera, arriostrada por sus vértices y revestida en dos de sus caras. Calcular la superficie de la figura (hexágono irregular) MNOPQR.



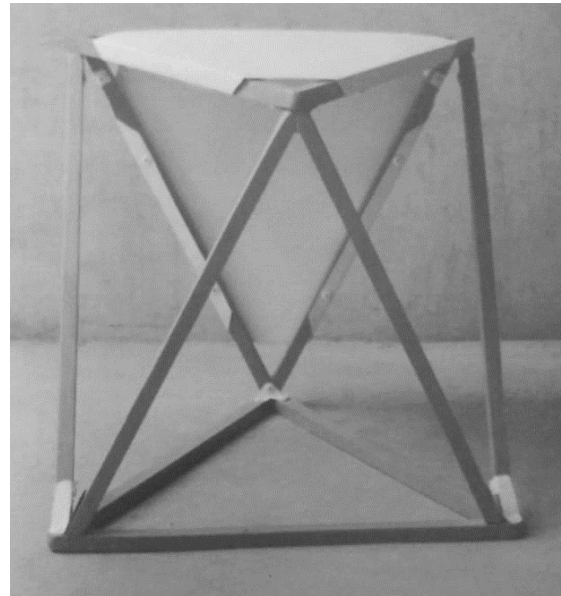
ESQUEMA VISTA SUPERIOR

Datos

$$AB = BC = AC = 45 \text{ cm}$$

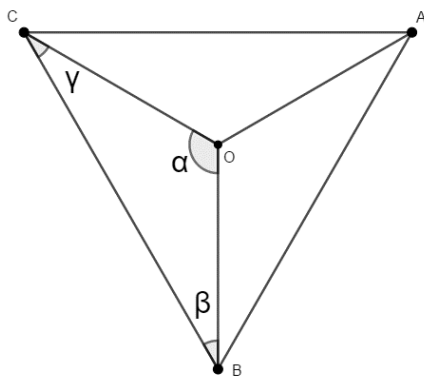
$$MN = OP = QR = 30 \text{ cm}$$

$$NO = PQ = MR$$



Ejercicio 11

El taburete TRES TREVIA es un proyecto realizado en la Cátedra de Diseño Industrial 1B y su autora es Camila Moyano. Con un solo material se conforma el asiento y los apoyos del taburete. Se trata de una chapa doblada con remaches para rigidización. Calcular el valor de los ángulos interiores del triángulo OBC. Expresar: α en sistema sexagesimal y β en sistema radial.



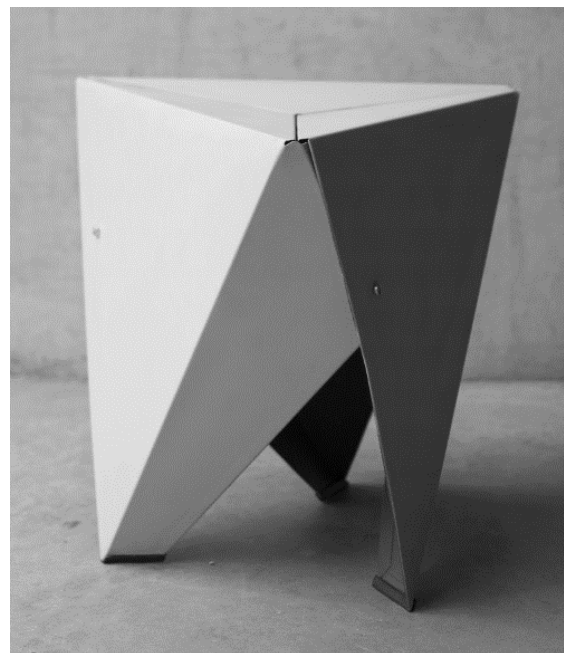
ESQUEMA VISTA SUPERIOR

Datos

$$AB = BC = AC = 42 \text{ cm}$$

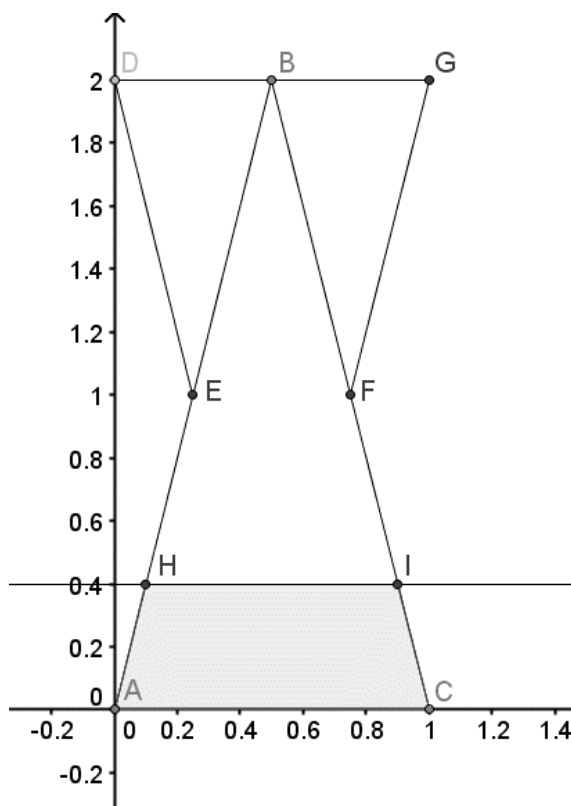
Triángulo isósceles BOC

El punto O coincide con el centro del triángulo ABC



Ejercicio 12

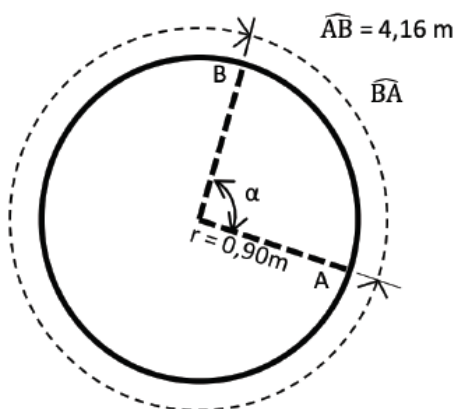
La siguiente imagen nos muestra la estantería Nuvola Rossa, diseño de Vico Magistretti. Se trata de una librería de madera inspirada en la estructura de las escaleras de madera. A partir de los datos del gráfico adjunto, calcular la superficie del trapecio AHIC, obtenido a partir de los dos últimos estantes y la estructura triangular.



Ejercicio 13

El diseñador alemán Mathias Koehler es el autor de la mecedora, interpretación moderna de una silla mecedora tradicional. Lateralmente posee forma circular y en su parte superior cuenta con una luz para lectura. A partir de los datos dados, se pide:

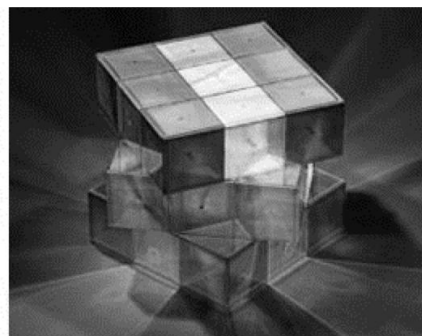
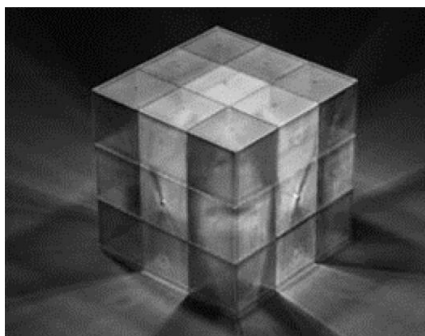
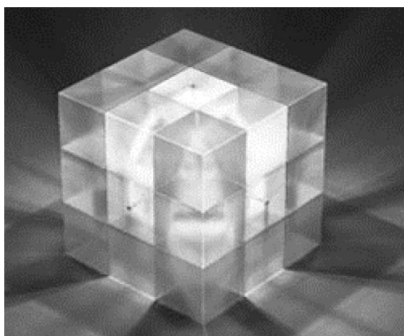
- Determinar el valor del ángulo α en grados sexagesimales.
- Si se reduce un 20 % la longitud de su radio, ¿cuál será la longitud del arco BA?



Ejercicio 14

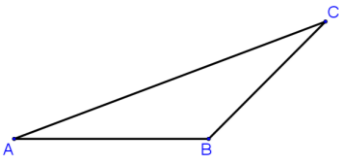
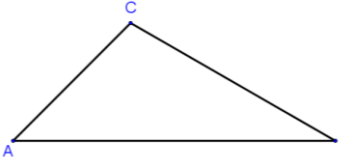
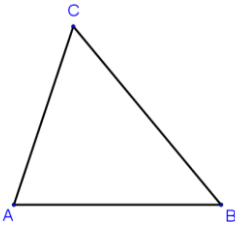
La lámpara de Rubik es un diseño basado en el popular juguete de los años 80. Se trata de un cubo, compuesto por 27 cubos menores que, al ser rotados unos respecto de otros, permiten un sin número de posibilidades de iluminación tipo caleidoscópica. Si el valor de la arista del cubo mayor es de 30 cm, se pide:

- a) Calcular el valor de la diagonal mayor del cubo.
b) Calcular el valor de la diagonal de los cubos menores.



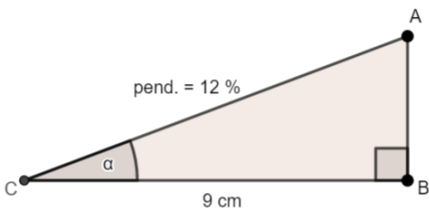
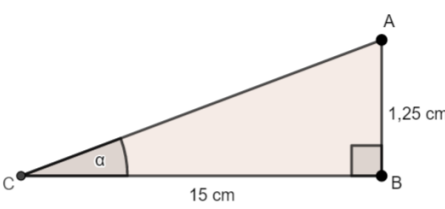
Ejercicio 15

Para cada triángulo oblicuángulo, calcular los elementos faltantes (lados o ángulos), el perímetro y la superficie y completar la tabla.

	Figura I	Figura II	Figura III
			
Lado AB	5 cm	11 cm	
Lado BC	$\sqrt{18}$ cm		$\sqrt{61}$ cm
Lado AC	$\sqrt{72}$ cm	$\sqrt{32}$ cm	$\sqrt{40}$ cm
Áng. A		45°	
Áng. B			50° 11' 39,94"
Ang. C			
Perím.			
Superf.			

Ejercicio 16

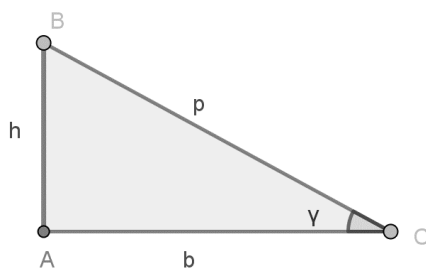
Completar la tabla para tres rampas dadas a partir de los datos incluidos. Los gráficos son esquemáticos.

		
Pendiente (en %)	12%	
Ángulo (α)		
Cat. opuesto (AB)		15 cm
Cat. adyacente (BC)	9 cm	1,25 cm
Hipotenusa (AC)		

Ejercicio 17

Un móvil debe trasladarse sobre un plano inclinado. A partir del gráfico que se presenta, se pide:

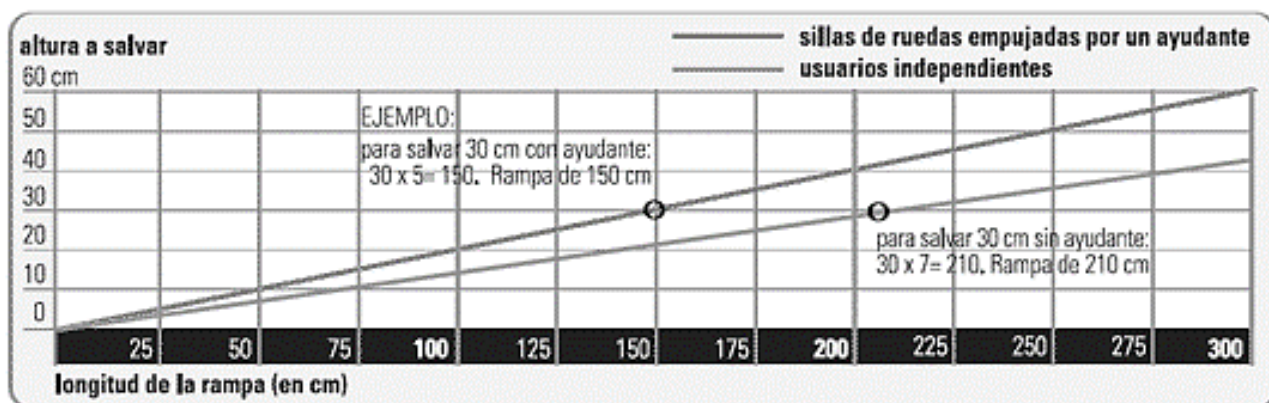
- Calcular la pendiente (en %) del plano inclinado para "h" igual a 30 cm y "b" igual a 50 cm.
- Calcular el valor del ángulo "γ".



Ejercicio 18

En el gráfico que se presenta se grafican dos rampas en función de la altura a salvar (sobre eje vertical) y de la longitud de la proyección de la rampa (en horizontal). Responder:

- ¿Cuál es la pendiente en % de la rampa para sillas de ruedas empujadas por un ayudante y cuál para usuarios independientes? Expresar en cm.
- Si la rampa para usuarios independientes debe salvar una altura de 45 cm, ¿cuál será su desarrollo inclinado?
- Si la rampa para silla de ruedas empujada por un ayudante debe tener un desarrollo en horizontal de 2 m, ¿qué altura salvará? Expresar en m.



Respuestas ejercicios

Ejercicio 1

SIST. SEXAGESIMAL	SIST. RADIAL
78° 06' 36''	1,363276679 rad
37° 13' 48''	0,64978608 rad
64° 39' 36''	1,128529894 rad
30° 40' 48''	0,535467014 rad
122° 30' 00''	2,138028334 rad
26° 49' 12''	0,468097305 rad

Ejercicio 2

ÁNGULO	SIST. SEXAGESIMAL	SIST. RADIAL
α (alfa)	77° 54' 36''	1,359786020229 rad
β (beta)	38° 39' 36''	0,674744288821 rad

γ (gamma)	141° 20' 24"	2,466848364769 rad
δ (delta)	26° 34' 12"	0,4637339822549 rad

Ejercicio 3

LADOS (en m)			
a	b	c	FÓRMULA UTILIZADA
12	15	$\sqrt{369}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
4	3	5	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
16	9	$\sqrt{337}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
5	12	13	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
8	6	10	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Ejercicio 4

TRIÁNGULOS	LADOS (en m)			ÁNGULOS		
	a	b	c	α	β	γ
I	5	6,403124245	4	51° 20' 24,69''	90°	38° 39' 35,31''
II	2	6	6,324555	18° 26' 5,82''	71° 33' 54,18''	90°
III	6	8	10	36° 52' 11,63''	53° 7' 48,37''	90°

Ejercicio 5

Verificación

Ejercicio 6

4 veces

Ejercicio 7

Superficie: 12,51134652 cm²

Ejercicio 8

Lado BC: 5,833984373 cm

Ángulo C: 52° 43' 36,25''

Ejercicio 9

Volumen: 16,21989399 cm³

Ejercicio 10

Superficie: 803,7798279 cm²

Ejercicio 11

$\alpha = 120^\circ$

$\beta = 0,523598775$ rad

Ejercicio 12

Superficie: 0,36 m²

Ejercicio 13

a) $\alpha = 95^\circ 9' 58,23''$

b) Arco BA: 1,195893425 m

Ejercicio 14

- a) Diagonal cubo mayor: 51,96152423 cm
b) Diagonal cubo menor: 17,32050808 cm

Ejercicio 15

	Figura I	Figura II	Figura III
Lado AB	5 cm	11 cm	7 cm
Lado BC	$\sqrt{18}$ cm	$\sqrt{65}$ cm	$\sqrt{61}$ cm
Lado AC	$\sqrt{72}$ cm	$\sqrt{32}$ cm	$\sqrt{40}$ cm
Áng. A	21° 24' 18,02''	45°	71° 33' 54,18''
Áng. B	133° 7' 14,25''	29° 44' 41,57''	50° 11' 39,94''
Ang. C	25° 28' 27,73''	105° 15' 18,4''	58° 14' 25,88''
Perím.	17,72792206 cm	24,719112 cm	21,134805 cm
Superf.	7,741930912 cm ²	22 cm ²	21 cm ²

Ejercicio 16

Pendiente (en %)	12%	8,3 %
Ángulo (α)	6° 50' 33,98''	4° 45' 49,11''
Cateto opuesto (AB)	1,08 cm	15 cm
Cateto adyacente (BC)	9 cm	1,25 cm
Hipotenusa (AC)	9,064568385 m	15,05199322 m

Ejercicio 17

- a) Pendiente: 60%
b) $\gamma = 30^\circ 57' 49,52''$

Ejercicio 18

- a) Pendiente para sillas de ruedas: 20%. Pendiente para usuarios independientes: 14,28571429 %.
b) Desarrollo inclinado: 318,1980351 cm
c) Altura: 0,40 m

IV. AUTOEVALUACIÓN

- 1) La trigonometría estudia principalmente:
 - a) Las figuras planas y sus perímetros.
 - b) La relación entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo.
 - c) El cálculo de áreas de polígonos regulares.
 - d) La relación entre ángulos y circunferencias.
- 2) ¿A cuántos radianes equivale un ángulo de 180° ?
 - a) $\pi/4$ rad
 - b) $\pi/2$ rad
 - c) π rad
 - d) 2π rad
- 3) El punto de intersección de las bisectrices de un triángulo se llama:
 - a) Baricentro
 - b) Circuncentro
 - c) Incentro
 - d) Ortocentro
- 4) El circuncentro de un triángulo se obtiene como intersección de:
 - a) Las bisectrices
 - b) Las mediatrices
 - c) Las alturas
 - d) Las medianas
- 5) Una rampa posee un ángulo de inclinación igual a 45° . La pendiente de dicha rampa es:
 - a) 45 %
 - b) 50 %
 - c) 100 %
 - d) Ninguna de las anteriores.
- 6) Si una rampa tiene una pendiente del 37,5 %, significa que:
 - a) Por cada 1 m horizontales sube 3,75 m.
 - b) Por cada 10 m horizontales sube 3,75 m.
 - c) Por cada 100 m horizontales sube 3,75 m.
 - d) Ninguna de las anteriores.
- 7) La tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como:
 - a) Cateto opuesto / Hipotenusa
 - b) Cateto adyacente / Hipotenusa
 - c) Cateto opuesto / Cateto adyacente
 - d) Hipotenusa / Cateto adyacente
- 8) En un triángulo rectángulo, si $a = 3$ y $b = 4$, el valor de la hipotenusa es:
 - a) 5
 - b) 6
 - c) 7
 - d) $\sqrt{13}$
- 9) Un ángulo de 2π rad equivale a:
 - a) 90°
 - b) 180°

- c) 270°
 - d) 360°
- 10) El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de:
- a) Bisectrices
 - b) Mediatrices
 - c) Alturas
 - d) Medianas
- 11) Un triángulo rectángulo tiene catetos de 8 m y 15 m. Su hipotenusa mide:
- a) 16 m
 - b) 17 m
 - c) 18 m
 - d) 20 m
- 12) La pendiente de un plano inclinado se expresa también como:
- a) $\cos \alpha$
 - b) $\sin \alpha$
 - c) $\tan \alpha$
 - d) $\cotg \alpha$
- 13) La diagonal de un cubo de arista 30 cm mide:
- a) $30\sqrt{2}$
 - b) $30\sqrt{3}$
 - c) 60
 - d) 45
- 14) El ángulo recto en radial es:
- a) $\pi/2$ rad
 - b) π rad
 - c) π rad
 - d) $\pi/4$ rad
- 15) El teorema de Pitágoras se aplica a:
- a) Todo tipo de triángulos
 - b) Triángulos isósceles
 - c) Triángulos equiláteros
 - d) Triángulos rectángulos
- 16) Un arco de una circunferencia abarca un ángulo de 50° y mide 6,981317008 mm. El radio de dicha circunferencia mide:
- a) 4 mm
 - b) 8 mm
 - c) 12 mm
 - d) 16 mm
- 17) El plano inclinado de una rampa tiene 2,549509757 m de largo y supera un desnivel de 50 cm. La pendiente de esa rampa es:
- a) 2 %
 - b) 20 %
 - c) 50 %
 - d) 19,61161351 %

- 18) Un objeto posee forma de triángulo isósceles. Sus lados iguales miden 18 mm cada uno y el lado distinto mide 9 mm. La superficie de dicho triángulo es:
- 162 mm^2
 - $40,5 \text{ mm}^2$
 - 81 mm^2
 - $78,42791276 \text{ mm}^2$
- 19) Si la diagonal de un cuadrado mide 5,65684249 mm, la superficie de dicha figura es igual a:
- 16 mm^2
 - 32 mm^2
 - 8 mm^2
 - Ninguna de las anteriores.
- 20) Un objeto posee forma de triángulo oblicuángulo. Dos de sus lados miden 40 cm y 52 cm respectivamente y el ángulo comprendido entre ellos es igual a 35° . El perímetro del triángulo es:
- 125,2264955 cm
 - 121,938729 cm
 - 138 cm
 - Ninguna de las anteriores.

Respuestas autoevaluación

- b) La relación entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo.
- c) $\pi \text{ rad}$
- c) Incentro
- b) Las mediatrices
- c) 100 %
- b) Por cada 10 m horizontales sube 3,75 m
- c) Cateto opuesto / Cateto adyacente
- a) 5 (Pitágoras)
- d) 360°
- c) Alturas
- b) 17 m
- c) $\text{tg } \alpha$
- b) $30\sqrt{3}$
- a) $\pi/2 \text{ rad}$
- d) Triángulos rectángulos
- b) 8 mm

17) d) 20 %

18) d) 78,42791276 mm²

19) a) 16 mm²

20) b) 121,938729 cm

POLÍGONOS

I. MARCO TEÓRICO

1. Polígono. Definición. Clasificación

1.1. Elementos

1.2. Polígono regular

2. Igualdad y semejanza de polígonos

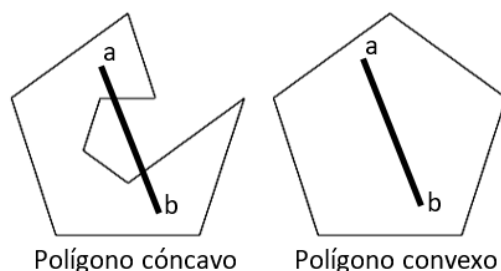
II. EJERCICIOS

III. AUTOEVALUACIÓN

I. MARCO TEÓRICO

1. Polígono. Definición. Clasificación

Un **polígono** es una porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada, formada por tres o más rectas. Se clasifican en cóncavos y convexos. Es **cóncavo** cuando existe por lo menos un par de puntos pertenecientes al polígono que determina un segmento no incluido en el mismo y es **convexo** cuando cualquier par de puntos perteneciente al polígono determina siempre un segmento incluido en el mismo.

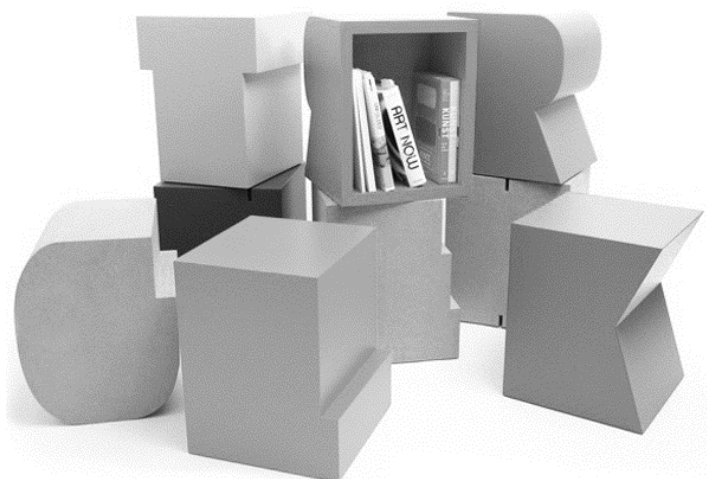


Polígono cóncavo

Polígono convexo

Según el **número de lados** (n) reciben los siguientes nombres:

n	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono



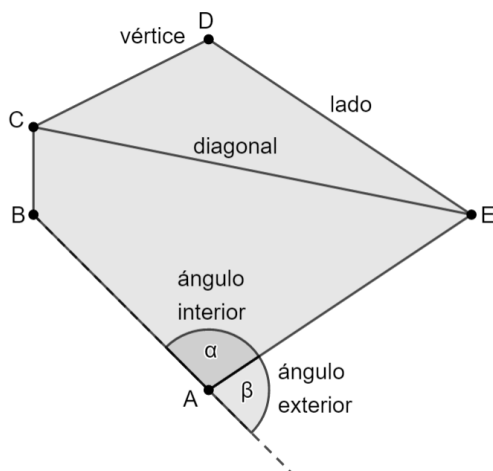
La imagen que se presenta pertenece al estudio alemán de Lilli y Sascha Grewe. Se trata de asientos/estantes con formas de letras. Las distintas caras son polígonos cóncavos y/o convexos, regulares y/o irregulares.

1.1. Elementos

Los **elementos** de todo polígono son:

- **Lados:** segmentos rectilíneos que componen la poligonal.
- **Vértices:** puntos en donde se encuentran los lados sucesivos.

- **Ángulos interiores:** formados por dos lados consecutivos del polígono.
- **Ángulos exteriores:** formados por la prolongación de uno de sus lados y el lado consecutivo. Por lo que cada ángulo interior tiene su exterior correspondiente.
- **Diagonales:** segmentos determinados por dos vértices no consecutivos.



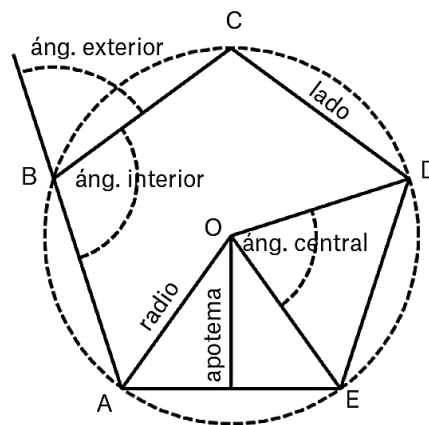
Para todo polígono se verifican las siguientes **propiedades**:

Número de diagonales	$N = \frac{(n - 3) \cdot n}{2}$
Suma de ángulos interiores	$S_{AI} = 180^\circ \cdot (n - 2)$
Suma de ángulos exteriores	$S_{AE} = 360^\circ$
Suma de ángulos interiores y exteriores	$SAI + SAE = 180^\circ \cdot n$

1.2. Polígono regular

Un polígono es **regular**, cuando sus lados y ángulos son iguales, es decir, es **equilátero** y **equiángulo**. Se caracterizan por tener, además, los siguientes elementos o puntos notables:

- **Centro:** punto desde el cual se puede trazar la circunferencia que pasa por los vértices del polígono.
- **Radio:** segmento determinado por el centro y un vértice del polígono.
- **Apotema:** segmento determinado por el centro y el punto medio del lado.
- **Ángulo central:** ángulo que tiene por vértice el centro del polígono y por lados dos radios consecutivos.

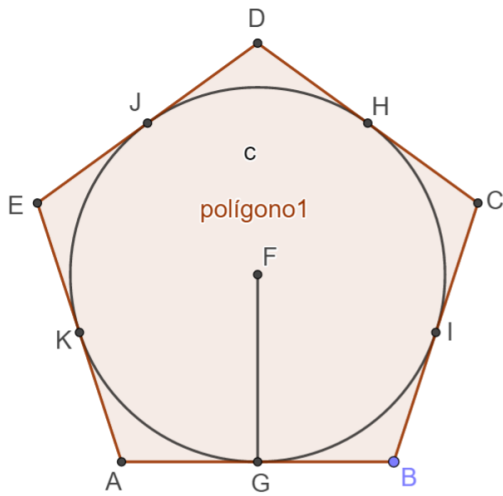


Para todo polígono regular se cumple:

Ángulo central	$AC = \frac{360^\circ}{n}$
Superficie del polígono regular	$S = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2}$
Ángulo interior	$A_{INT} = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}$
Ángulo exterior	$A_{EXT} = \frac{360^\circ}{n}$

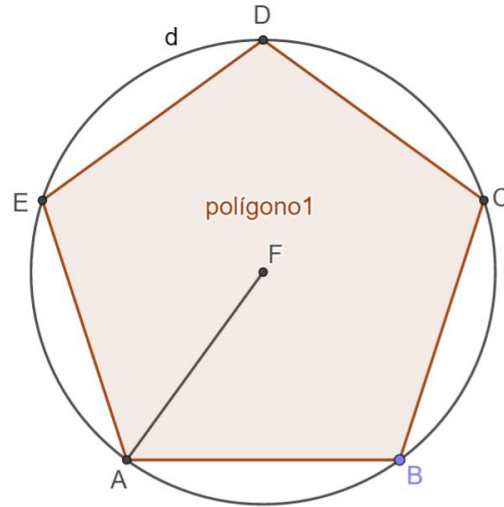
Caso A

Una circunferencia está inscrita en un polígono regular cuando los puntos medios de los lados del polígono son puntos de la circunferencia y el radio de esta es igual a la apotema del polígono.



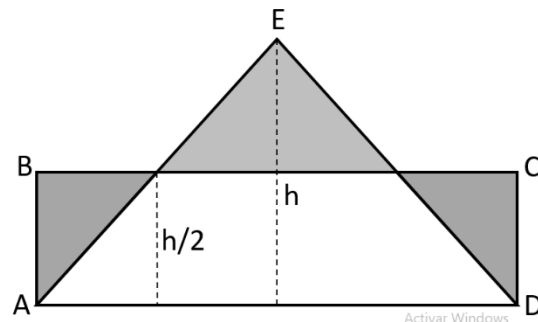
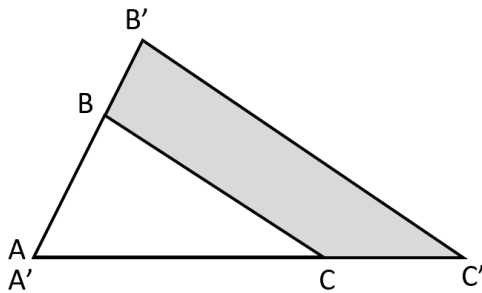
Caso B

Un polígono regular está inscrito en una circunferencia cuando sus vértices son puntos de la circunferencia y el radio del polígono es igual al radio de la circunferencia.



2. Igualdad, Semejanza y Equivalencia de Polígonos

- Dos polígonos son **iguales** cuando los lados y ángulos del primero son respectivamente iguales a los lados y ángulos del segundo.
- Dos polígonos del mismo número de lados son **semejantes**, cuando sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos proporcionales. En la figura de abajo: ABC es semejante a A'B'C'.
- Dos polígonos son **equivalentes** cuando tienen diferente forma e igual superficie. En la figura de abajo: ABCD es equivalente a AED (la altura del rectángulo es igual a la mitad de la altura del triángulo).



II. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Para los ángulos dados se pide:

- Completar la tabla con el modo que falta -complejo o incomplejo-.
- Encontrar cuál de los ángulos de la tabla corresponde al **ángulo central de un heptágono** regular. Graficar.

Ángulo	
Complejo	Incomplejo
	128,3°
135° 30'	
	147,2727222°
163° 38'10,9"	
128° 34'16,1"	
	51,42857143°

Ejercicio 2

A partir de los datos de cada polígono calcular los elementos restantes y completar la tabla.

Polígono regular	N° de lados	Ángulo central	Ángulo exterior	Ángulo interior	Sumatoria de ángulos interiores
Cuadrado					
				120°	
					1080°
				140°	
		36°			
		32° 43'38,18"			

Ejercicio 3

A partir de los datos dados para cada polígono, calcular el perímetro y superficie (medidas en cm).

Polígono regular	Lado	Apotema	Perímetro	Superficie
Pentágono		20		
Hexágono	10			
Heptágono	30			
Octógono		40		
Eneágono	2			
Decágono		10		

Ejercicio 4

De dos polígonos se conocen los siguientes datos: el primero es regular y tiene un ángulo central que mide 60°, y en el segundo polígono el número de diagonales es igual al número de lados. Indicar de qué polígonos se trata y el número total de diagonales da cada uno.

Ejercicio 5

Calcular el volumen de un recipiente de base hexagonal regular, sabiendo que su perímetro es igual a 48 cm y su altura es igual al doble de la longitud del lado del hexágono.

Ejercicio 6

Dos polígonos regulares tienen el mismo perímetro. El primero es un pentágono y el valor de su lado es 8 cm. Si el valor del lado del segundo polígono es 4 cm: ¿de qué polígono se trata?

Ejercicio 7

Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia de radio igual a 3 cm.

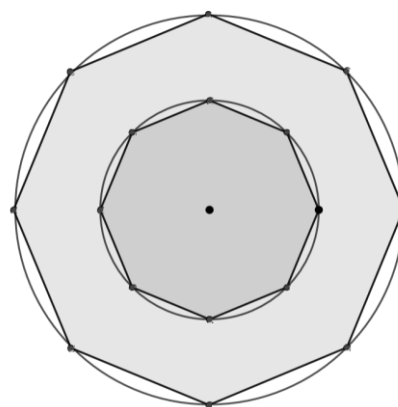
- ¿Cuál es el valor de su lado?
- ¿Cuál es el valor del lado del hexágono que se encuentra circunscripto a la misma circunferencia?
Graficar
- Calcular la superficie de ambos hexágonos.

Ejercicio 8

La base de un recipiente posee forma de octógono regular. Si la apotema del octógono mide 20 cm, ¿cuál es el perímetro y la superficie de dicha base?

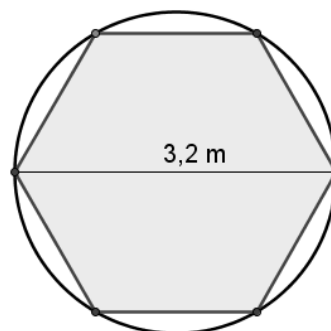
Ejercicio 9

La imagen muestra la Pava tetera de Peter Behrens (1909). En la vista superior de la misma se pueden observar dos octógonos inscritos en dos circunferencias. Si suponemos que dichas circunferencias tienen 9 y 16 cm de diámetro respectivamente: ¿cuánto miden los lados de los octógonos?



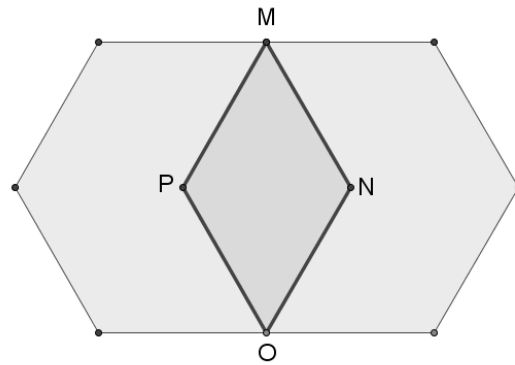
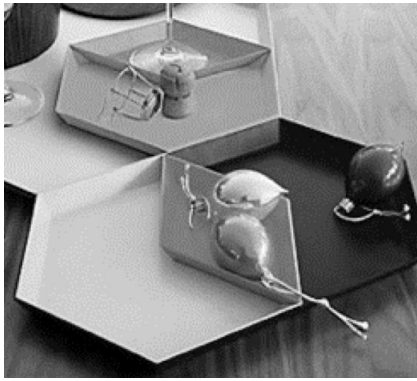
Ejercicio 10

La figura muestra un banco de Zano mobiliario urbano diseñado a partir de un hexágono regular. Se desea conocer la superficie (área sombreada) que ocuparán estos bancos si se colocan 10 unidades en un espacio público de esparcimiento. El diámetro de la circunferencia circunscripta es de 3,20 m.



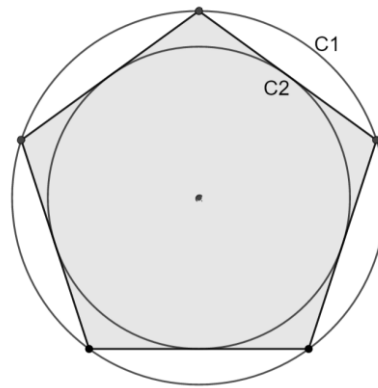
Ejercicio 11

La imagen muestra una bandeja conformada por troncos de pirámides de base hexagonal regular de distintos tamaños y colores. Calcular la superficie de intersección (polígono MNOP) entre dos de los hexágonos que conforman la base del objeto, tal como se muestra en la abstracción geométrica. El lado del hexágono mide 12,12 cm.



Ejercicio 12

La circunferencia C1 circunscribe a un pentágono regular de lado igual a 30 mm, mientras que la circunferencia C2 está inscripta en dicho polígono. Calcular la superficie de corona circular determinada por C1 y C2.



Respuestas ejercicios

Ejercicio 1

a)

Ángulo	
Complejo	InComplejo
128° 18'	128,3°
135° 30'	135,5°
147° 16'21,8"	147,2727222°
163° 38'10,9"	163,6363611°
128° 34'16,1"	128,5711389°
51° 25'42,86"	51,42857143°

b) El ángulo central de un heptágono es 51,42857143°

Ejercicio 2

Polígono regular	N° de lados	Ángulo central	Ángulo exterior	Ángulo interior	Sumatoria de ángulos interiores
Cuadrado	4	90°	90°	90°	360°
Hexágono	6	60°	60°	120°	720°
Octógono	8	45°	45°	135°	1080°

Eneágono	9	40°	40°	140°	1260°
Decágono	10	36°	36°	144°	1440°
Undecágono	11	32° 43'38,18"	32° 43'38,18"	147° 16'21,8"	1620°

Ejercicio 3

Polígono regular	Lado (cm)	Apotema (cm)	Perímetro (cm)	Superficie (cm ²)
Pentágono	29,06170112	20	145,3085056	1453,085056
Hexágono	10	8,660254038	60	259,8076211
Heptágono	30	31,1478204	210	3270,521142
Octógono	33,13708499	40	265,0966799	5301,933598
Eneágono	2	2,747477419	18	24,72729678
Decágono	6,498393925	10	64,98393925	324,9196962

Ejercicio 4

El primer polígono es un hexágono (9 diagonales) y el segundo polígono es un pentágono (5 diagonales).

Ejercicio 5

Volumen = 2660,43004cm³

Ejercicio 6

Decágono

Ejercicio 7

a) Lado = 3 cm

b) Lado= 3,4641011615 cm

c) Superficie hexágono inscripto = 23,3826859 cm²; Superficie hexágono circunscripto = 31,17691454 cm²

Ejercicio 8

P = 132,54834 cm; S=1325,4834 cm²

Ejercicio 9

Lado del octógono menor = 3,444150891 cm; lado del octógono mayor = 6,122934918 cm

Ejercicio 10

Superficie = 66,51075101 m²

Ejercicio 11

Superficie MNOP = 127,2142821 cm²

Ejercicio 12

Superficie corona circular = 706,858347 cm²

IV. AUTOEVALUACIÓN

- 1) Un polígono es:
 - a) Una porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada formada por tres o más rectas.
 - b) Un cuerpo geométrico sólido con al menos cuatro caras.
 - c) Un tipo de solido platónico
 - d) Una línea abierta compuesta por segmentos consecutivos.
- 2) ¿Cuál de los siguientes polígonos es convexo?
 - a) Aquel en el que existe un segmento entre dos puntos del polígono que queda fuera de la figura.
 - b) Aquel en el que todos los segmentos que unen dos puntos pertenecen al polígono.
 - c) El que tiene al menos un ángulo mayor de 180° .
 - d) El que posee lados desiguales.
- 3) El número total de diagonales que se pueden trazar en un octógono es:
 - a) 8
 - b) 14
 - c) 20
 - d) 40
- 4) El ángulo exterior de un decágono regular mide:
 - a) 18°
 - b) 36°
 - c) 72°
 - d) 144°
- 5) Un polígono regular es:
 - a) El que tiene todos los ángulos iguales, aunque los lados sean diferentes.
 - b) El que es equilátero y equiángulo al mismo tiempo.
 - c) El que tiene un número impar de lados.
 - d) El que está inscrito en una circunferencia.
- 6) Un rectángulo de base igual a 5 cm y altura igual a 2 cm es "equivalente" a un triángulo de base igual a 5 cm y altura igual a 4 cm.
 - a) Verdadero
 - b) Falso
- 7) Si dos rectángulos poseen el mismo perímetro podemos afirmar que los mismos son semejantes.
 - a) Verdadero
 - b) Falso
- 8) Un objeto posee una tapa con forma de pentágono regular de 2,5 mm de espesor. Si el lado del pentágono mide 5 cm, el volumen de la tapa, expresado en mm^3 , es igual a:
 - a) 156, 25 mm^3
 - b) 10752,98375 mm^3
 - c) 107,5298375 mm^3
 - d) Ninguna de las anteriores
- 9) Un cielorraso posee forma de hexágono regular y su apotema mide 4,5 m. El perímetro del cielorraso es igual a:
 - a) 15,58845727 m
 - b) 27 m
 - c) 31,17691454 m

d) Ninguna de las anteriores

10) El valor de la diagonal AE del hexágono regular ABCDEF, si su perímetro es de 84 cm, es:

- a) 24,24871131cm
- b) 48,49742261cm
- c) 20,78460969cm
- d) Ninguna de las anteriores

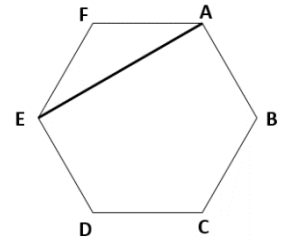


Gráfico sin escala

Respuestas de autoevaluación

- 1) a) Una porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada formada por tres o más rectas.
- 2) b) Aquel en el que todos los segmentos que unen dos puntos pertenecen al polígono.
- 3) c) 20
- 4) b) 36°
- 5) b) El que es equilátero y equiángulo al mismo tiempo.
- 6) a) Verdadero
- 7) b) Falso
- 8) b) $10752,98375 \text{ mm}^3$
- 9) c) 31,17691454 m
- 10) a) 24,24871131cm

SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL PLANO

I. MARCO TEÓRICO

1. Modelos y realidad. el problema de REPRESENTAR
2. Sistemas de representación
3. Sistemas bidimensionales
 - 3.1. Sistema de coordenadas rectangulares
 - 3.2. Sistema de coordenadas polares
 - 3.3. Relaciones entre sistemas

II. EJERCICIOS

III. AUTOEVALUACIÓN

I. MARCO TEÓRICO

1. Modelos y realidad. el problema de REPRESENTAR

La búsqueda de una relación entre cosas aparentemente desvinculadas (la llamada causa aristotélica) es tan vieja como el hombre, como lo es ponerle orden al aparente caos del entorno. Por ello, desde Galileo a Descartes (representante de la ideologización de un mundo estático y medible), y de D'Arcy Thompson (quien vincula matemática y naturaleza) a Mandelbrot (creador de la Teoría del Fractal para representar sistemas dinámicos), la Matemática ha buscado definir **modelos** como representación de esa realidad (hoy tan dinámica y superadora). Además, no resulta lo mismo observar objetos arquitectónicos (tridimensionales) como líneas y figuraciones (por ejemplo, una fachada).

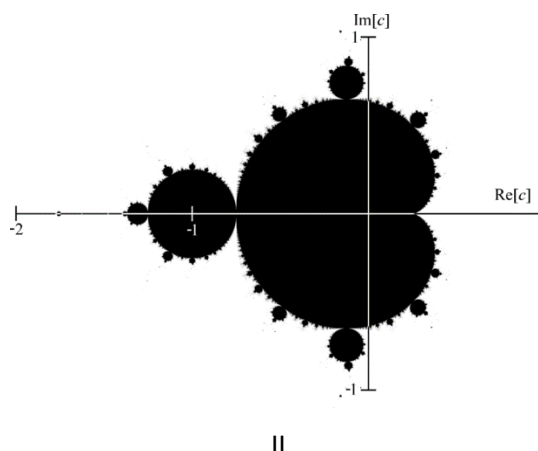
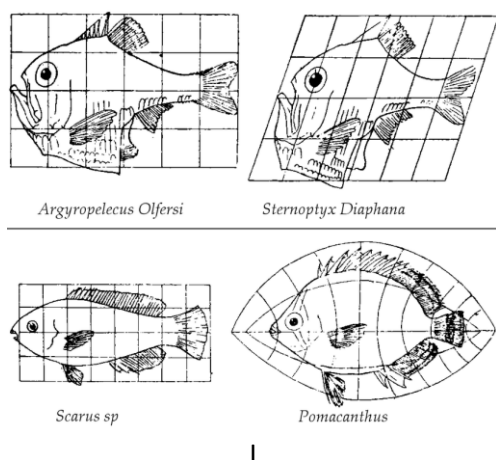


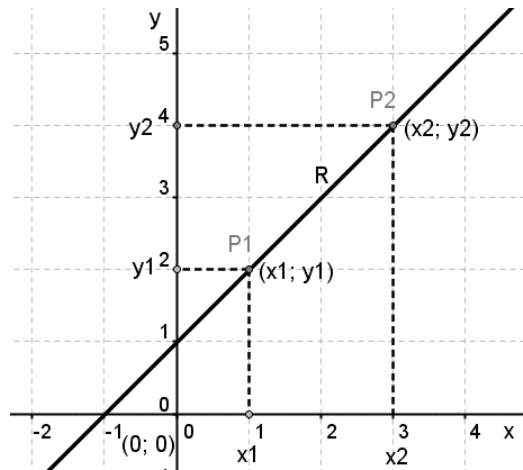
Figura I: Cuadrículas de coordenadas utilizado por D'Arcy Thompson (Teoría de las Transformaciones). Figura II: Representación matemática del conjunto de Mandelbrot.

La Geometría Analítica es una rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de las propiedades geométricas por medio del álgebra, e inversamente se ocupa del estudio de las ecuaciones mediante sus representaciones gráficas. Así, ciertos aspectos de la realidad pueden ser modelizados matemáticamente y representados de manera unidimensional, bidimensional o tridimensional.

Los dos problemas fundamentales a resolver con la Geometría Analítica son:

- Dada una ecuación hallar el lugar geométrico que representa.
- Dado el lugar geométrico (conjunto de los puntos que cumplen con cierta condición), hallar su ecuación matemática.

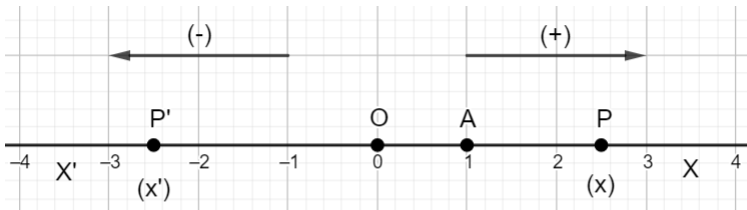
En el gráfico que se presenta a continuación puede observarse una recta asociada a un sistema de coordenadas rectangulares en el plano. Así, existe una relación biunívoca entre el lugar geométrico (conjunto de puntos que forman la recta) y la ecuación matemática que responde a la forma $y = ax + b$.



2. Sistemas de representación

Unidimensional

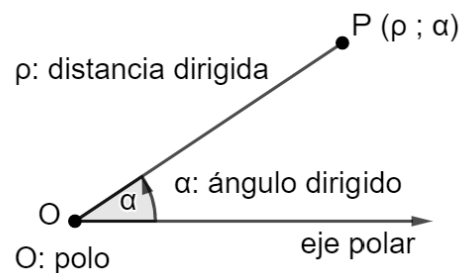
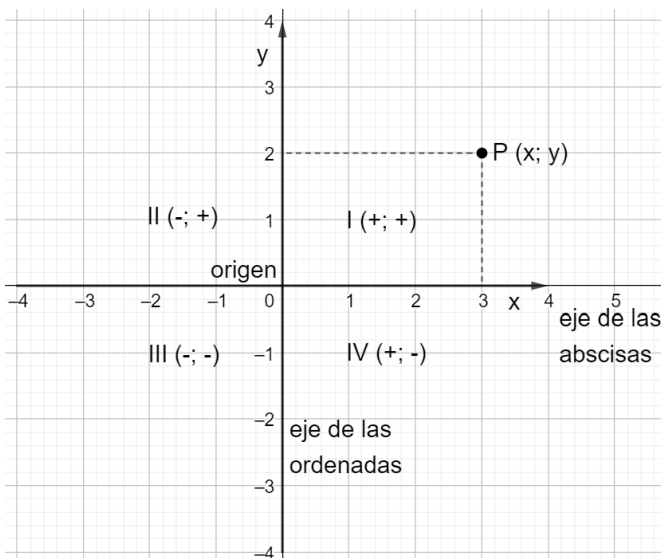
Sistema formado por una recta numérica escalada.



X'X: Eje
O: Origen del sistema
P: Punto
x: Coordenada del punto

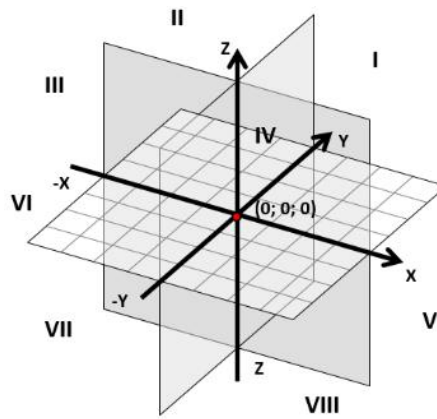
Bidimensional

Sistemas en el plano formado por dos rectas numéricas perpendiculares (ejes coordenados) que definen cuatro cuadrantes, o bien una recta numérica y un ángulo de rotación con centro en un polo.



Tridimensional

Sistema en el espacio formado por tres planos cartesianos que se intersectan de manera perpendicular entre sí, definiendo tres ejes cartesianos y ocho octantes.



Siempre, de manera biunívoca, a todo **punto** le corresponde un **lugar geométrico** (gráfica), y a todo lugar geométrico le corresponde un punto, sea en la recta, en el plano o en el espacio.

3. Sistemas bidimensionales

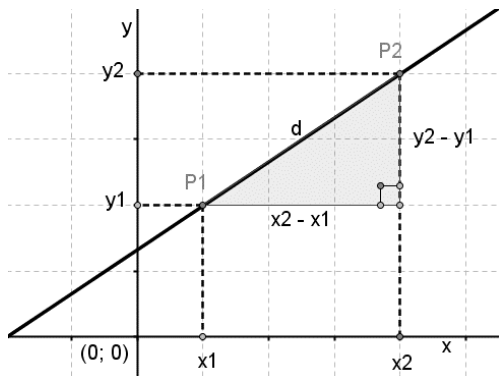
3.1. Sistema de coordenadas rectangulares

Fue René Descartes (siglo XVIII), quien planteó que dos rectas numéricas (horizontal o **eje de abscisas** y vertical o **eje de ordenadas**), dispuestas a 90° entre ellas, permitirían ser relacionadas con puntos de manera ordenada: **par ordenado (x; y)**. Se trata de un sistema **planar**, **rectangular** (90°) y **bidimensional**.

A partir de ello, se pueden calcular **distancias**:

Entre el **punto** y el **origen** (0; 0) del sistema: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

Entre **dos puntos**:



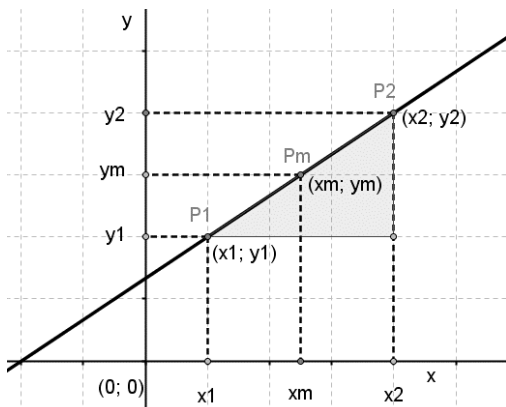
Distancia $\overline{P_1P_2} / \overline{P_2P_1}$

$P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

También calcular el punto medio ($x_m; y_m$) de un segmento:



$P_1(x_1; y_1)$

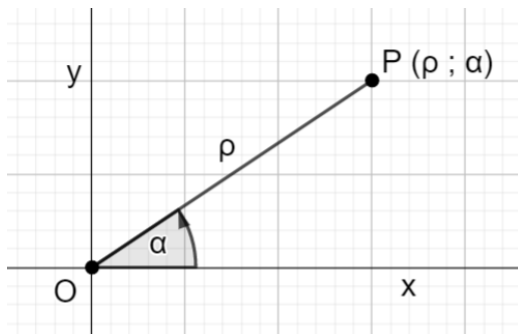
$P_2(x_2; y_2)$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3.2. Sistema de coordenadas polares

Aquí, todo punto se representa a partir de una distancia “ ρ ” (del origen del sistema al punto) y un ángulo de rotación “ α ” (formado entre “ ρ ” y el semieje positivo de las abscisas).



O: polo

$\overline{OX}$: eje polar

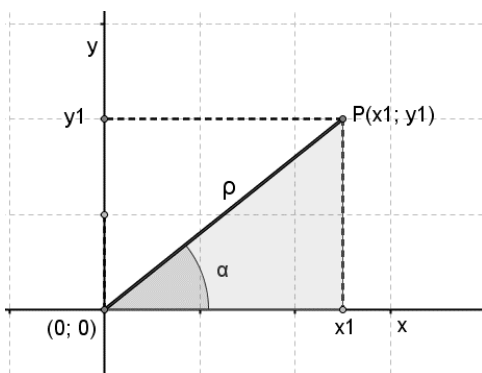
ρ : distancia al polo O

α : ángulo polar

3.3. Relaciones entre sistemas

Se puede, además, realizar la conversión de coordenadas cartesianas a coordenadas polares y viceversa.

De coordenadas cartesianas a coordenadas polares



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

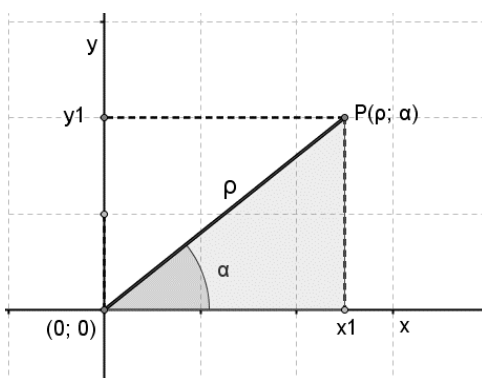
$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_1}{x_1}$$

$P(\rho; \alpha)$

De coordenadas polares a coordenadas cartesianas



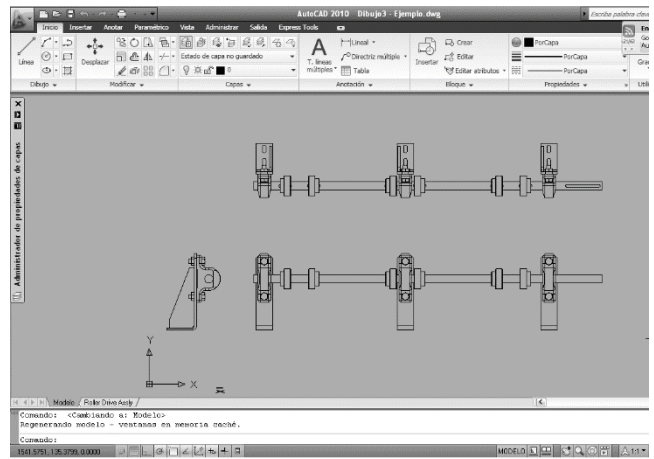
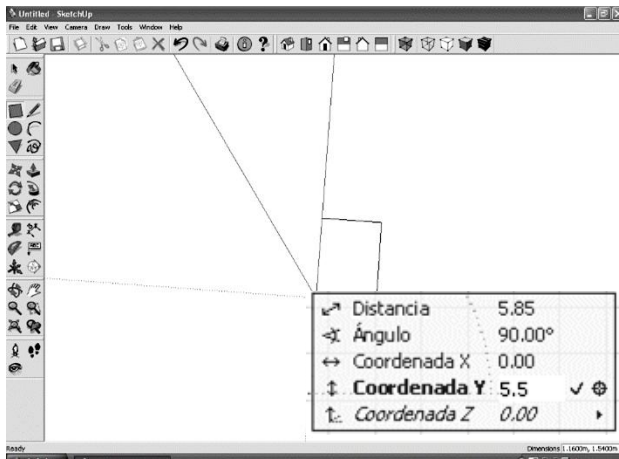
$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$$

$$x_1 = \rho \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\rho}$$

$$y_1 = \rho \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$P(x_1; y_1)$



Imágenes: Software (SketchUp y Autocad) de Diseño Asistido por Computadora utilizados en entornos de diseño que utilizan sistemas de referencias para posicionar los distintos elementos en el plano y/o el espacio.

II. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Los puntos A, B, C, D y E pertenecen al plano xy. En la tabla se indican sus coordenadas.

- Indicar, en la misma, **a qué cuadrante pertenecen**, analizando los signos de las coordenadas.
- Graficar dichos puntos** en un sistema de coordenadas xy. Unirlos con segmentos en orden secuencial.
- Calcular las distancias**, en cm, entre A y B, B y C, C y D, D y E, A y E.

Puntos	Coordenadas cartesianas		Cuadrante
	x	y	
A	4	6	
B	5	-3	
C	-4	-5	
D	-5	0	
E	-3	5	

Ejercicio 2

Con los datos del ejercicio anterior, encontrar los puntos medios entre A y B (G), B y C (H), C y D (I), D y E (J) y, E y A (F). **Graficar dichos puntos y unirlos** para formar un pentágono irregular.

Ejercicio 3

Transformar las coordenadas rectangulares a polares de los puntos del ejercicio 1. Graficar.

Ejercicio 4

Los puntos A, B, C, D y E pertenecen al plano xy. En la tabla se indican sus coordenadas polares. Indicar, en la misma, **a qué cuadrante pertenecen**, analizando el ángulo de rotación α .

Puntos	Coordenadas polares		Cuadrante
	ρ	α	
A	4,924428901	293° 57' 44,9''	
B	6	270°	
C	5	53° 7' 48,34''	
D	4	209° 30' 51,3''	
E	$\sqrt{33}$	133° 19' 28,84''	

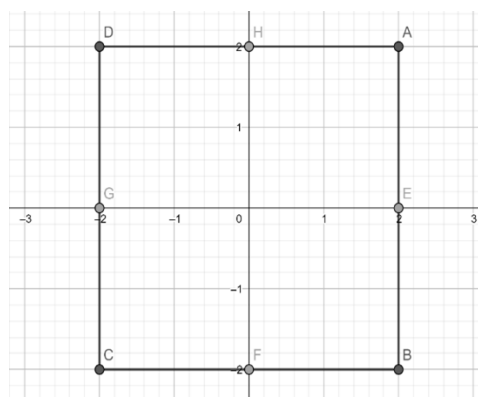
Ejercicio 5

Transformar las coordenadas polares en rectangulares de los puntos del ejercicio 4.

Ejercicio 6

Se ha ubicado un sistema de coordenadas en el centro geométrico de un cuadrado de 4 cm de lado.

- Calcular las coordenadas polares** de los vértices del cuadrado.
- Calcular las coordenadas polares** de los puntos medios de los lados.



Ejercicio 7

Los puntos A (1; 5), B (5; -2) y C (-3; -2) se corresponden con los vértices de un triángulo isósceles. **Calcular la superficie**, en cm^2 , de dicho triángulo.

Ejercicio 8

Dados los puntos A ($\sqrt{68}$; $75,96375653^\circ$), B ($\sqrt{20}$; $153,4349488^\circ$), C (10; $143,1301024^\circ$) y D ($\sqrt{148}$; $99,462322211^\circ$), **hallar la longitud**, en cm, de una de las diagonales del rectángulo ABCD que conforman.

Ejercicio 9

Dadas las coordenadas polares de dos vértices no consecutivos de un cuadrado: A ($\sqrt{13}$; $33^\circ 41' 24,24''$) y C ($\sqrt{85}$; $40^\circ 36' 4,66''$), se pide:

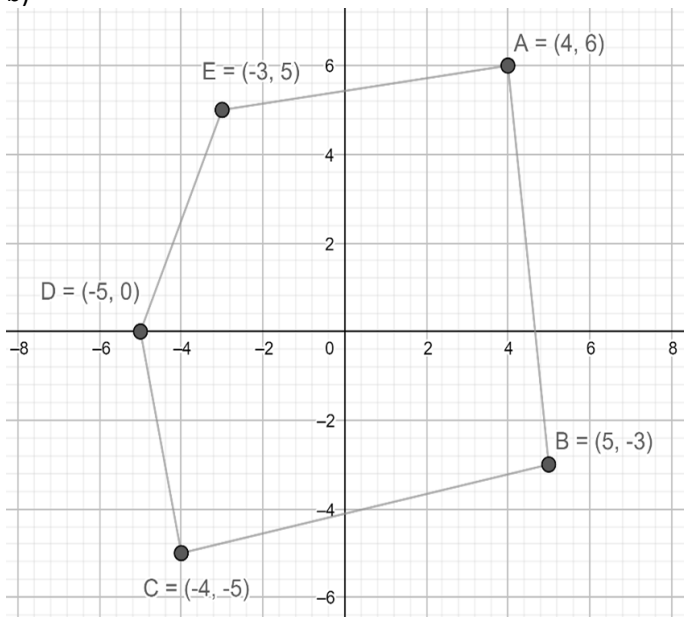
- Graficar ambos puntos** en un sistema de coordenadas.
- Determinar el valor del lado del cuadrado.** Medidas en cm.

Ejercicio 1

a)

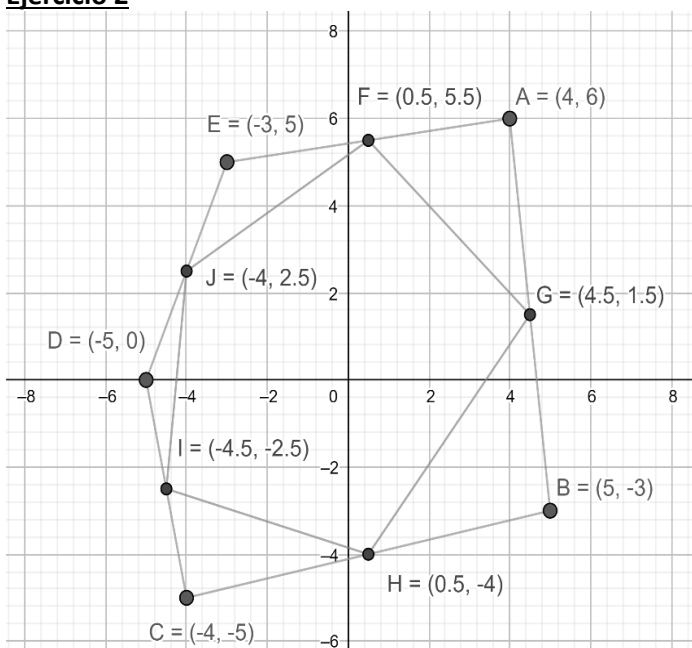
Puntos	Coordenadas cartesianas		Cuadrante
	x	y	
A	4	6	1
B	5	-3	4
C	-4	-5	3
D	-5	0	Semieje -x
E	-3	5	2

b)



c) d A-B = 9,055385138 cm; d B-C = 9,219544457 cm; d C-D = 5,099019514 cm; d D-E = 5,385164807 cm; d A-E = 7,071067812 cm

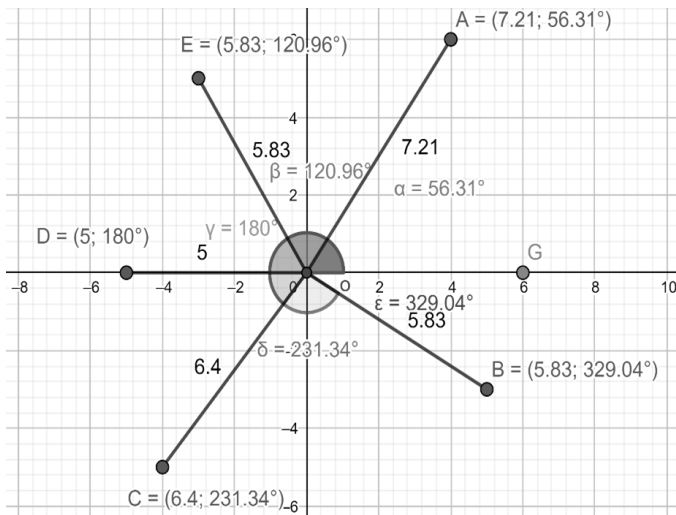
Ejercicio 2



G (4,5; 1,5); H (0,5; -4); I (-4,5; -2,5); J (-4; 2,5); F (0,5; 5,5)

Ejercicio 3

Puntos	Coordenadas Cartesianas		Coordenadas Polares	
	x	y	ρ	α
A	4	6	7,211102551	56° 18' 35,76''
B	5	-3	5,830951895	329° 2' 10,48''
C	-4	-5	6,403124237	231° 20' 24,69''
D	-5	0	5	180°
E	-3	5	5,830951895	120° 57' 49,52''



Ejercicio 4

Puntos	Coordenadas polares		Cuadrante
	ρ	α	
A	4,924428901	293° 57' 44,9''	4
B	6	270°	Semieje -y
C	5	53° 7' 48,37''	1
D	4	209° 30' 51,3''	3
E	$\sqrt{33}$	133° 19' 28,84''	2

Ejercicio 5

Puntos	Coordenadas cartesianas		Coordenadas rectangulares	
	ρ	α	x	y
A	4,924428901	293° 57' 44,9''	2	-4,5
B	6	270°	0	-6
C	5	53° 7' 48,37''	3	4
D	4	209° 30' 51,3''	-3,480932795	-1,970560042
E	$\sqrt{33}$	133° 19' 28,84''	-3,941526806	4,179038937

Ejercicio 6

a)

Puntos	Coordenadas cartesianas	
	ρ	α
A	2,8288427125	45°

B	2,828427125	315°
C	2,828427125	225°
D	2,828427125	135°

b)

Puntos	Coordenadas Polares	
	ρ	α
E	2	0°
F	2	270°
G	2	180°
H	2	90°

Ejercicio 7

28 cm²

Ejercicio 8

10,19803903 cm

Ejercicio 9

b) 4 cm

III. AUTOEVALUACIÓN

- 1) ¿En qué cuadrante se encuentra un punto con coordenadas $(-x; +y)$?
 - a) Primero
 - b) Segundo
 - c) Tercero
 - d) Cuarto
- 2) ¿Cómo se denomina al punto $(0;0)$ en el sistema de coordenadas rectangulares?
 - a) Polo
 - b) Punto medio
 - c) Centroide
 - d) Origen
- 3) ¿Cómo se llaman los ejes del sistema de coordenadas rectangulares?
 - a) Eje polar y eje angular
 - b) Eje de abscisas y eje de ordenadas
 - c) Eje mayor y eje menor
 - d) Eje horizontal y eje diagonal
- 4) En el sistema de coordenadas polares, un punto se representa mediante:
 - a) Una distancia y un ángulo
 - b) Dos distancias perpendiculares
 - c) Una recta y una curva
 - d) Un par ordenado $(x; y)$
- 5) Las coordenadas del punto medio entre A $(-3; 5)$ y B $(0; 8)$ son:
 - a) $(1,5; -6,6)$
 - b) $(-1,5; 6,5)$
 - c) $(1; 2,25)$
- 6) La distancia entre A $(-3; 5)$ y B $(0; 8)$, en mm, es igual a:
 - a) 4,242640687 mm
 - b) 13,34166406 mm
 - c) 8,246211251 mm
- 7) La distancia entre A $(1; 1)$ y B $(-1; -1)$ es igual a $\sqrt{2}$.
 - a) Verdadero
 - b) Falso
- 8) Dos puntos ubicados sobre el eje de las ordenadas poseen igual coordenada "y".
 - a) Verdadero
 - b) Falso
- 9) Unir con flechas las coordenadas cartesianas y polares que identifican un mismo punto en el plano.

a) $(12; -3)$	I $(2; 45^\circ)$
b) $(-12; 3)$	II $(5; 90^\circ)$
c) $(0; 5)$	III $(5; 180^\circ)$
d) $(-5; 0)$	IV $(\sqrt{153}; 165^\circ 57' 49,5'')$
e) $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$	V $(\sqrt{200}; 225^\circ)$
f) $(-10; -10)$	VI $(\sqrt{153}; 345^\circ 57' 49,5'')$

- 10) ¿Cuál es la expresión correcta para calcular la distancia de un punto $P(x; y)$ al origen?
- a) $d = (x^2 - y^2)/2$
 - b) $d = x + y$
 - c) $d = \sqrt{x^2 + y^2}$
 - d) $d = |x - y|$

Respuestas autoevaluación

- 1) b) Segundo.
- 2) d) Origen.
- 3) b) Eje de abscisas y eje de ordenadas.
- 4) a) Una distancia y un ángulo.
- 5) b) (-1,5; 6,5)
- 6) a) 4,242640687 mm
- 7) b) Falso.
- 8) b) Falso.
- 9) a) con VI; b) con IV; c) con II; d) con III; e) con I; f) con V.
- 10) c) $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

SECCIONES CÓNICAS: CIRCUNFERENCIA

I. MARCO TEÓRICO

1. Secciones cónicas
2. Circunferencia. Definición
 - 2.1. Elementos
 - 2.2. Ecuaciones

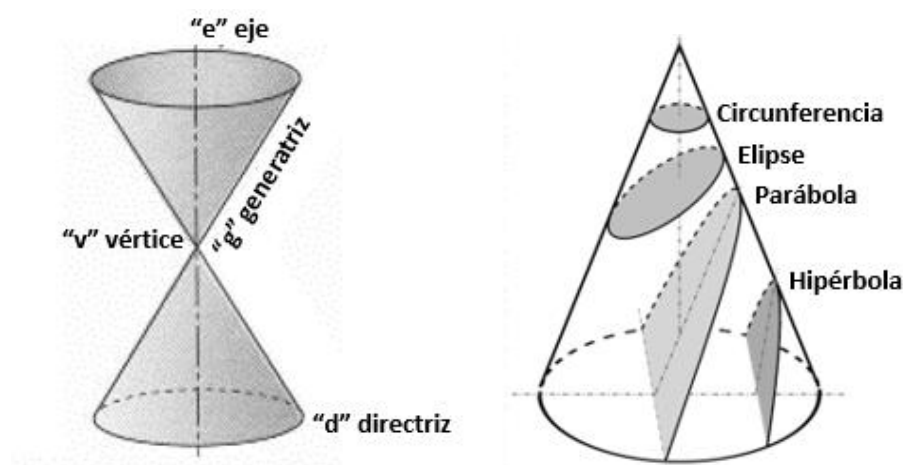
II. EJERCICIOS

III. AUTOEVALUACIÓN

I. MARCO TEÓRICO

1. Secciones cónicas

Las secciones cónicas son **curvas** de segundo grado que se obtienen al cortar un cono recto de revolución de dos ramas por planos que lo intersectan con diferentes ángulos de inclinación. Si dichos planos no pasan por el vértice, se obtienen las cuatro secciones cónicas: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.



La superficie a partir de la cual se obtienen dichas secciones se denomina **superficie cónica**. Se trata de una superficie reglada, generada por el desplazamiento de una recta generatriz (g), alrededor de otra recta (e), llamada eje, sobre una línea directriz (d) que determina las condiciones de generación de la superficie cónica. Las generatrices (g) convergen en punto común o vértice (v).

SECCIONES CÓNICAS			
CÓNICAS CERRADAS		CÓNICAS ABIERTAS	
CIRCUNFERENCIA	ELIPSE	PARÁBOLA	HIPÉRBOLA
(a)	(b)	(c)	(d)

- (a) Si el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje, la sección es una **circunferencia**.
 (b) Si inclinamos el plano de modo que sea oblicuo con el eje y corte a todas las generatrices, la sección es una **elipse**.
 (c) Si continuamos inclinando el plano de modo que sea oblicuo con el eje y que sea paralelo a una generatriz, resulta una **parábola**.
 (d) Si inclinamos aún más el plano, de modo que sea paralelo a dos generatrices, resulta una curva con dos ramas llamada **hipérbola**.

Si abordamos las secciones cónicas desde la geometría analítica, veremos que responden a la ecuación general de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en donde A, B, C, D y E son los coeficientes -números reales- que determinan el tipo de curva.

2. Circunferencia. Definición

Circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre una distancia constante a un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama **centro** de la circunferencia, y la distancia constante se llama **radio**.

2.1. Elementos

Centro: punto interior equidistante de todos los puntos que pertenecen a la circunferencia.

Radio: segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.

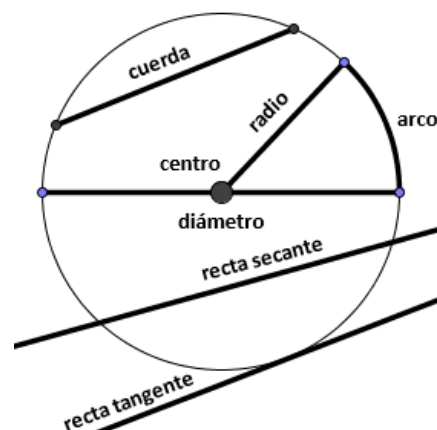
Cuerda: segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro: cuerda que pasa por el centro.

Recta secante: recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Recta tangente: recta que toca a la circunferencia en un punto.

Arco: porción de circunferencia definida a partir de dos puntos sobre la misma.



2.2. Ecuaciones

En un sistema de coordenadas cartesianas, la circunferencia con centro en el punto $(h; k)$ y radio " r ", consta de todos los puntos $(x; y)$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

Ecuación canónica

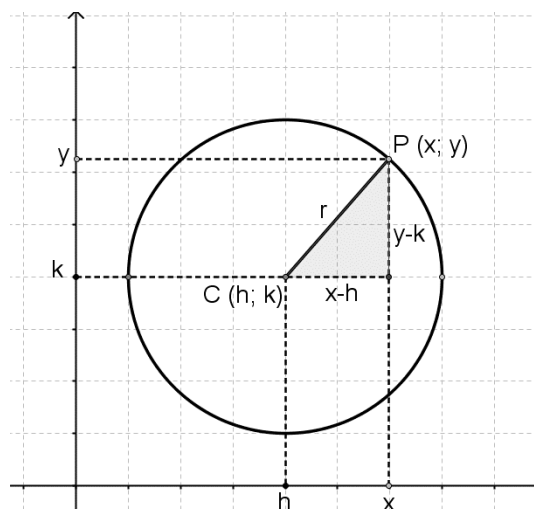
$$x^2 + y^2 = r^2$$

El centro de la circunferencia coincide con el origen

Ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

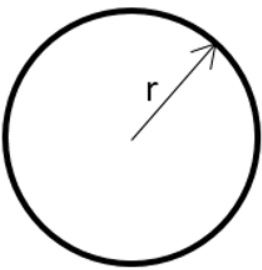
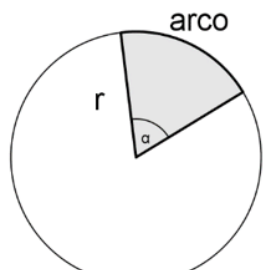
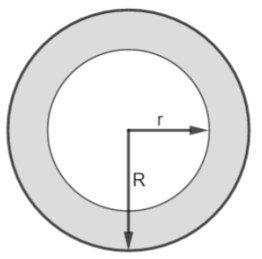
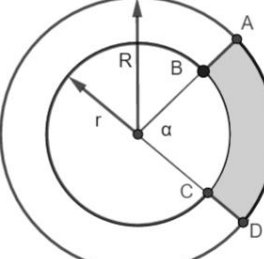
El centro de la circunferencia no coincide con el origen. " h " y " k " son las coordenadas del centro.





Objetos icónicos de diseño inspirados en la circunferencia. De izquierda a derecha: cenicero Copenhague de André Ricard, Tetera modelo MT 49 de Marianne Brandt, estantería desmontable "OTO 1000" de Pil Bredahl y Silla Burbuja de Eero Aarnio.

Fórmulas

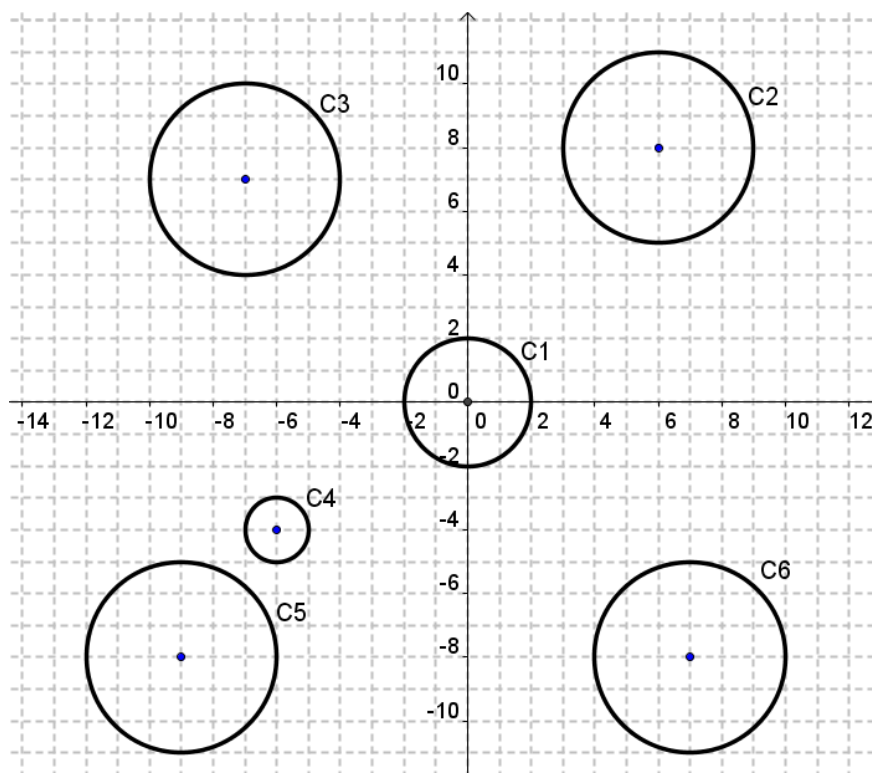
Circunferencia y círculo		Sector circular	
	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$ $A = \pi \cdot r^2$		$\text{arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ}$ $\text{Área} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$ $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{arco} \cdot \text{radio}$
Corono circular		Trapezio circular ABCD	
	$\text{Área} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$		$\text{Área} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360^\circ}$

II. EJERCICIOS

Ejercicio 1

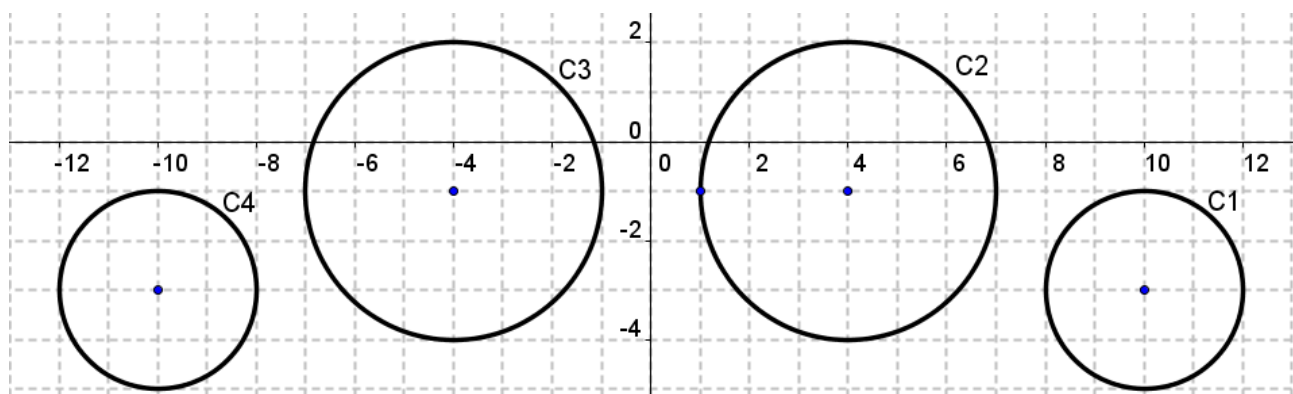
Completar la siguiente tabla a partir de la información dada en el gráfico para las distintas circunferencias.

	h	k	Radio "r"	Ecuación de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
C1				
C2				
C3				
C4				
C5				
C6				



Ejercicio 2

En la abstracción geométrica del tablero de un vehículo pueden observarse cuatro circunferencias. Si las mismas se asocian a un sistema de referencias, **indicar qué ecuación corresponde a cada circunferencia.**



Unir con flechas.

- | | |
|-------|----------------------------------|
| a) C1 | I) $(x + 10)^2 + (y + 3)^2 = 4$ |
| b) C2 | II) $(x - 10)^2 + (y + 3)^2 = 4$ |
| c) C3 | III) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ |
| d) C4 | IV) $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ |



Ejercicio 3

Dada la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$, **determinar si los siguientes puntos pertenecen o no a la misma:**

- a) (8; 9)
- b) (-2; 10)
- c) (4; 9)

Ejercicio 4

Dar la ecuación ordinaria de la circunferencia que circunscribe al triángulo de vértices:

A (0; 2,6), B (1,5; 0) y C (-1,5; 0). **Graficar.**

Ejercicio 5

La lámpara Cronos, creada por Federico Churba, consiste en una Pantalla de madera maciza hueca con iluminación LED. La circunferencia de la base inferior, de 56 cm de diámetro, se asocia a un sistema de coordenadas, ubicándose el centro en el origen. **Verificar si el punto P (25; 12,60952021) pertenece a dicha circunferencia.**



Ejercicio 6

Determinar el valor del radio (en mm) de una circunferencia con centro en el origen, sabiendo que el punto P (4; 3) pertenece a la misma. **Graficar.**

Ejercicio 7

Dadas las ecuaciones de dos circunferencias C1: $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ y C2: $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 1$, **¿cuál es la distancia (en mm) entre sus centros? Graficar.**

Ejercicio 8

En la mesa E-27 diseñada por Eileen Gray en 1927 pueden observarse un arco en la circunferencia inferior (base de apoyo de la mesa) y una superficie circular superior. Ambas poseen el mismo radio y se sabe que el perímetro de la circunferencia superior es igual a 157,0796327 cm. Se pide:

- a) **Calcular la longitud del arco de circunferencia** de la base de apoyo que abarca un ángulo de 300°.
- b) **Calcular la superficie del círculo superior.**



Ejercicio 9

La vista superior de la Tetera modelo mt 49 diseñada por Marianne Brandt en 1924 nos muestra dos círculos no concéntricos. Uno mayor y uno menor que actúa como tapa de la tetera. Se sabe que la superficie del círculo mayor es igual a 452,3893421 cm² y que el radio de la tapa (círculo menor) es igual a la mitad del radio del círculo mayor. **Calcular qué porcentaje representa la superficie del círculo menor respecto del círculo mayor.**



Ejercicio 10

El Junghans Max Bill es uno de los relojes de pulsera más conocidos de estilo Bauhaus. El diámetro del bisel (circunferencia exterior) es igual a 40 mm. **Calcular la superficie del sector circular** (área sombreada) para el caso en que las agujas del reloj marquen las 5 hs.



Ejercicio 11

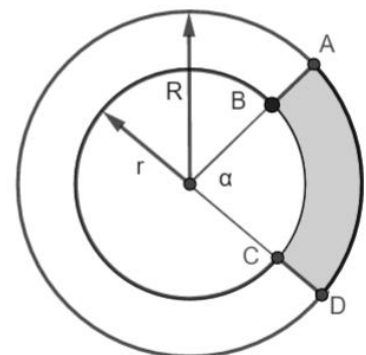
En el marco de la alianza entre una empresa automotriz y la Facultad de Arte y Diseño PUCP, estudiantes de la carrera de Diseño Industrial elaboraron diversos productos útiles con piezas de vehículos de la compañía en sintonía con los principios de economía circular. En la imagen puede observarse una mesa (superior) que utiliza dos materiales, uno transparente y otro opaco, formando una corona circular. De dicha corona se sabe que el diámetro del círculo mayor mide 60 cm y que el radio del círculo menor mide 20 cm. **Calcular la superficie de la corona circular.**



Información disponible en: <https://puntoedu.pucp.edu.pe/archivo/estudiantes-de-diseno-industrial-pucp-crean-proyectos-de-economia-circular-para-toyota/>

Ejercicio 12

El trapecio circular de la figura (área sombreada) posee una superficie igual a $8726,64626 \text{ mm}^2$. El radio de la circunferencia mayor mide 150 mm y el radio de la circunferencia menor mide 100 mm. Calcular el valor del ángulo " α " indicado en el gráfico.



Respuestas ejercicios

Ejercicio 1

	h	k	Radio "r"	Ecuación de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
C1	0	0	2	$x^2 + y^2 = 2^2$
C2	6	8	3	$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 3^2$
C3	-7	7	3	$(x + 7)^2 + (y - 7)^2 = 3^2$
C4	-6	-4	1	$(x + 6)^2 + (y + 4)^2 = 1^2$
C5	-9	-8	3	$(x + 9)^2 + (y + 8)^2 = 3^2$
C6	7	-8	3	$(x - 7)^2 + (y + 8)^2 = 3^2$

Ejercicio 2

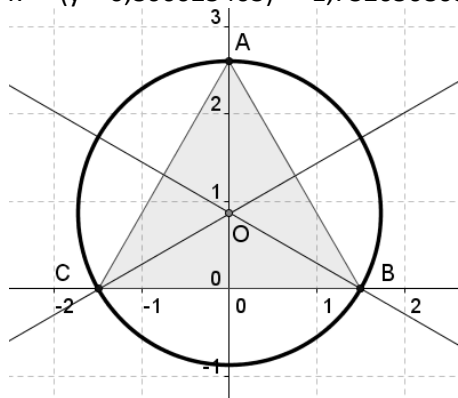
a) C1 II); b) C2 III); c) C3 IV); d) C4 I)

Ejercicio 3

a: no pertenece; b: no pertenece; c: si pertenece

Ejercicio 4

$$x^2 + (y - 0,866025403)^2 = 1,732050808^2$$

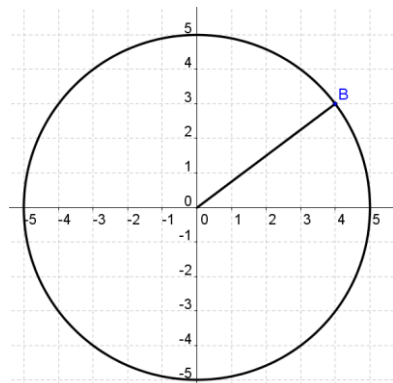


Ejercicio 5

$$x^2 + y^2 = 28^2: \text{ si pertenece}$$

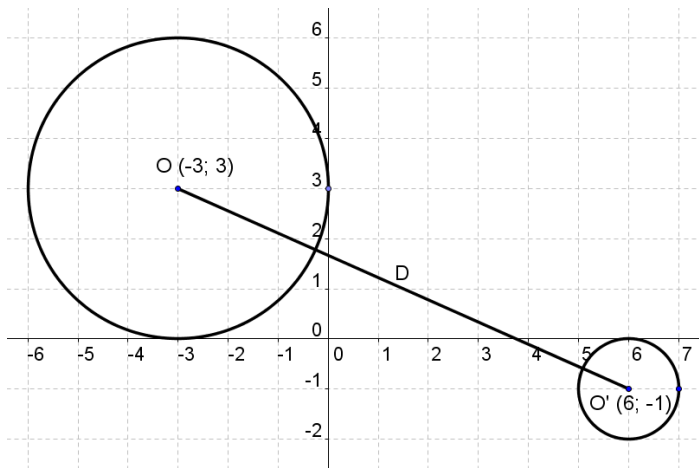
Ejercicio 6

Radio: $r = 5$



Ejercicio 7

Distancia: $D = 9,848857802 \text{ mm}$



Ejercicio 8

- a) 130,8996939 cm
- b) 1963,495408 cm

Ejercicio 9

25 %

Ejercicio 10

523,5987756 mm²

Ejercicio 11

1570,796327 cm²

Ejercicio 12

80°

III. AUTOEVALUACIÓN

- 1) ¿Qué figura se obtiene al cortar un cono recto de revolución con un plano perpendicular a su eje?
 - a) Elipse
 - b) Circunferencia
 - c) Parábola
 - d) Hipérbola
- 2) Una recta que toca a la circunferencia en un solo punto se llama:
 - a) Cuerda
 - b) Radio
 - c) Tangente
 - d) Secante
- 3) La ecuación ordinaria de una circunferencia con centro en el origen es:
 - a) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
 - b) $x^2 + y^2 = r^2$
 - c) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
 - d) $y^2 = 4ax$
- 4) Si una circunferencia tiene ecuación $x^2 + y^2 = 25$, ¿cuál es su radio?
 - a) 10
 - b) 25
 - c) 2,5
 - d) 5
- 5) Si la ecuación de una circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$, ¿dónde está su centro?
 - a) (3; 2)
 - b) (-3; 2)
 - c) (3; -2)
 - d) (-3; -2)
- 6) La ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en O (2; -3) y radio igual a 4 es:
 - a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
 - b) $x^2 + y^2 = 16$
 - c) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$
 - d) Ninguna de las anteriores
- 7) De una circunferencia se conocen las coordenadas cartesianas del centro C (5; -4), y las de un punto perteneciente a ella P (2; -2). La ecuación de dicha circunferencia:
 - a) $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 13$
 - b) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$
 - c) $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 13$
 - d) Ninguna de las anteriores.
- 8) De una circunferencia se conoce su ecuación: $x^2 + y^2 = 64$ y la abscisa de un punto del segundo cuadrante que pertenece a ella: $x = -4$. La ordenada de dicho punto es:
 - a) 8
 - b) 8,94427191
 - c) 6,92820323
 - d) Ninguna de las anteriores.

Respuestas autoevaluación

- 1) b) Circunferencia
- 2) c) Tangente
- 3) a) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- 4) d) 5
- 5) c) (3; -2)
- 6) a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
- 7) c) $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 13$
- 8) c) 6,92820323

POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

I. MARCO TEÓRICO

1. Poliedro. Definición.

1.1. Elementos

1.2. Poliedros regulares

1.3. Poliedros irregulares

1.3.1. Prisma

1.3.2. Pirámide

1.3.2.1. Tronco de pirámide

II. EJERCICIOS

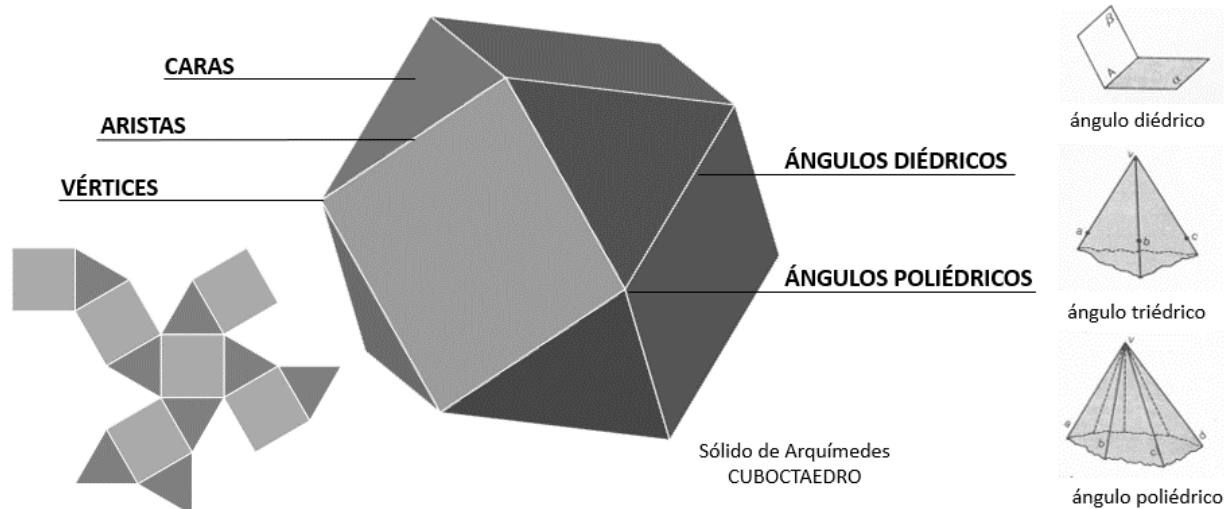
III. AUTOEVALUACIÓN

I. MARCO TEÓRICO

1. Poliedro. Definición

Del griego clásico πολυέδρον (polyedron), de la raíz πολύς (polys), “muchas” y de ἔδρα (edra), “base” o “cara”. Dados cuatro o más polígonos convexos tales que: dos cualesquiera de ellos no estén en el mismo plano, cada lado es común solamente a dos polígonos, y el plano de cada polígono deja a los demás en un mismo semiespacio, se llama poliedro a la figura formada por los puntos comunes a los semiespacios que contienen a dichos polígonos. Es decir, es un cuerpo geométrico limitado por porciones de planos denominadas caras (en la figura: Sólido de Arquímedes o cuboctaedro).

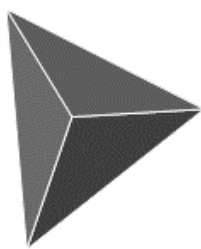
1.1. Elementos



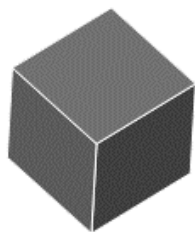
1.2. Poliedros regulares

Existen 5 poliedros regulares denominados sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Reciben el nombre de platónicos en alusión al filósofo griego Platón a quien se le atribuye haberlos estudiado en primera instancia. Las principales características de estos cuerpos geométricos son:

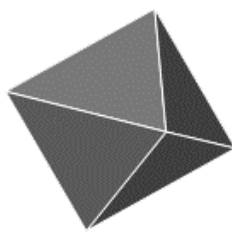
- Sus caras son polígonos regulares convexos.
- A cada uno de sus vértices concurren el mismo número de caras y de aristas.
- Todas sus aristas poseen la misma longitud.
- Todos los ángulos diedros que forman sus caras son iguales.



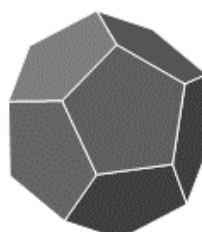
TETRAEDRO



HEXAEDRO



OCTAEDRO

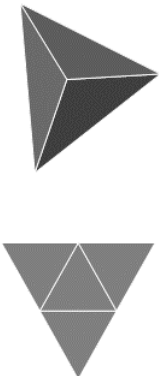
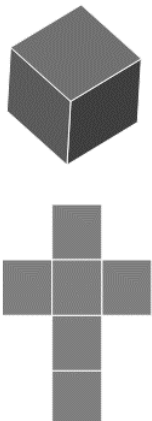
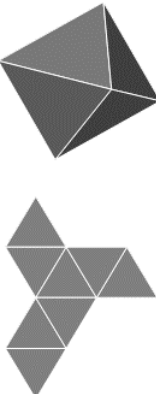
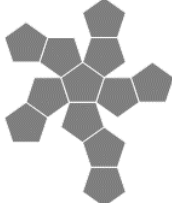


DODECAEDRO



ICOSAEDRO

A continuación, se presenta una tabla con los cinco sólidos platónicos en la que se especifica: número de caras, de vértices y aristas, polígonos que conforman las caras y las fórmulas para calcular la superficie y el volumen de cada uno a partir del valor de la arista (a).

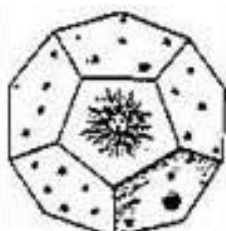
	TETRAEDRO	HEXAEDRO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
					
N° de caras	4	6	8	12	20
N° de vértices	4	8	6	20	12
N° de aristas	6	12	12	30	30
Polígonos de las caras	Triángulo	Cuadrado	Triángulo	Pentágono	Triángulo
Superficie	$a^2\sqrt{3}$	$6 a^2$	$2 a^2\sqrt{3}$	$3 a^2 \sqrt{5 (5+2\sqrt{5})}$	$5 a^2\sqrt{3}$
	$1,7321 a^2$	$6 a^2$	$3,4641 a^2$	$20,6457 a^2$	$8,6603 a^2$
Volumen	$a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$	a^3	$a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{5 a^3(3+\sqrt{5})}{12}$
	$0,1179 a^3$	a^3	$0,4714 a^3$	$7,6631 a^3$	$2,1817 a^3$



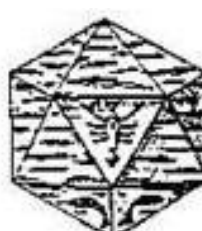
tierra



fuego



universo



agua



aire

Imagen tomada del tratado *Mysterium Cosmographicum* de Johannes Kepler en la que se asocia cada sólido platónico con un elemento de la naturaleza: tierra, fuego, universo, agua y aire

Además, todo poliedro regular:

- Inscribe a una esfera -tangente a cada una de sus caras-. El radio de la esfera inscrita en el poliedro es igual a su apotema -línea que une el centro del cuerpo con el centro de gravedad de cada una de sus caras- (Figura I).
- Está inscripto en una esfera. Sus vértices son puntos de esta. El radio de la esfera circunscrita al poliedro es la línea que une el centro del cuerpo con cada uno de sus vértices y se denomina radio (Figura II).

Fig. I

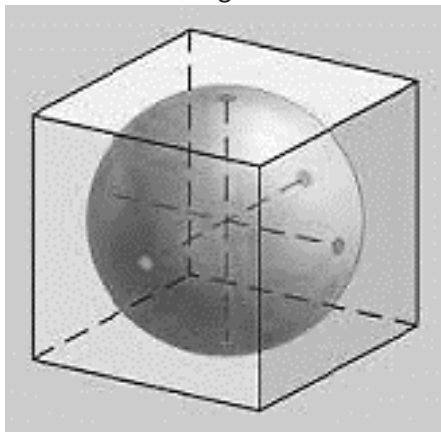
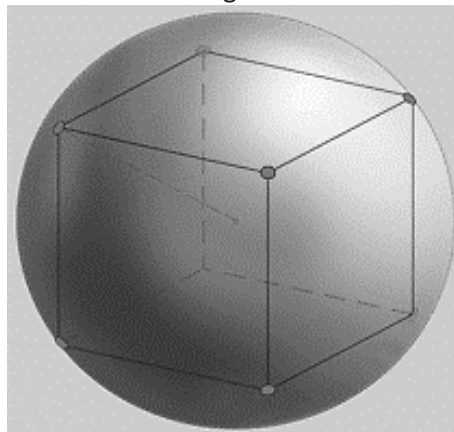


Fig. II

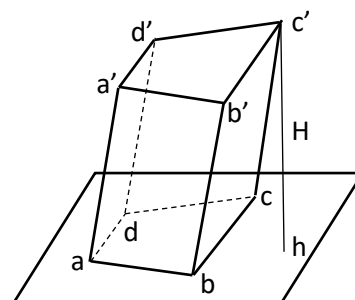


1.3. Poliedros irregulares

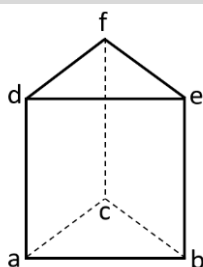
Son aquellos poliedros que poseen todas, o varias de sus caras y ángulos no congruentes. A esta clase pertenecen los **prismas** y las **pirámides**.

1.3.1. Prisma

Sólido determinado por dos bases poligonales paralelas y congruentes y por tantos paralelogramos como lados tengan las bases, denominadas caras. Elementos: bases ($abcd$ y $a'b'c'd'$), caras laterales ($aa'b'b$, $aa'd'd$, $cc'd'd$, $bb'c'c$), aristas laterales (aa' , bb' , cc' , dd') y de la base (ab , bc , cd , ad) y altura (H : distancia de un punto cualquiera de una base al plano de la cara opuesta).

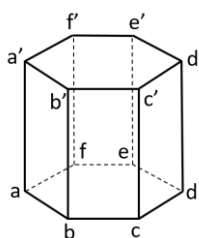


Prisma recto



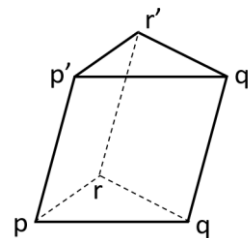
Las aristas son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son rectángulos. Las aristas son congruentes a la altura.

Prisma regular



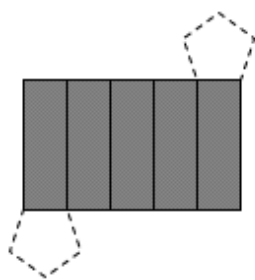
La base es un polígono regular.

Prisma oblicuo

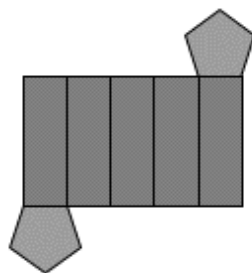


Las caras laterales son paralelogramos.

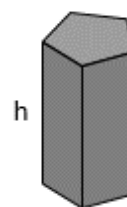
Prisma recto. Determinación de área y volumen



Área lateral
 $A_L = P_B \cdot h$



Área total
 $A_T = A_L + 2 A_B$

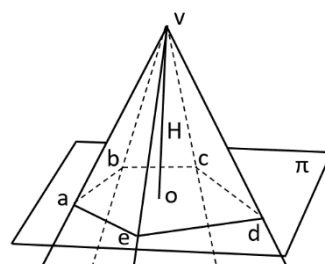


Volumen
 $V = A_B \cdot h$

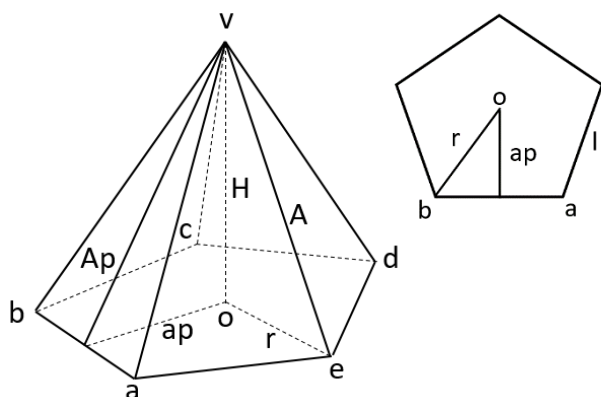
Referencias: A_B (área de la base), A_L (área lateral), h (altura), h_c (altura de la cara), P_B (perímetro de la base), V (volumen).

1.3.2. Pirámide

Dado un ángulo poliedro de vértice v y un plano π que corta a todas sus aristas, se llama pirámide a la intersección del ángulo poliedro y el semiplano de borde π que contiene al vértice. Elementos: base (abcde), vértice (v), caras laterales (avb, bvc, cvd, dve, ave, aristas laterales (av, bv, cv, dv, ev) y de la base (ab, bc, cd, de, ae), altura (H : distancia del vértice al plano de la base).

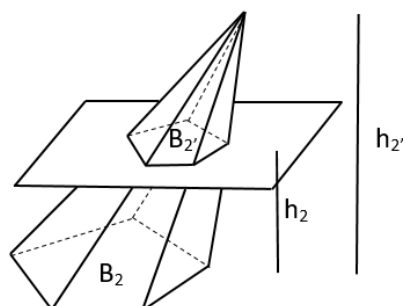


Pirámide recta



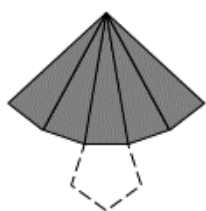
La base es un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro del polígono. Las caras laterales son congruentes y la apotema de la pirámide es la altura de cada una de las caras.

Pirámide oblicua



El eje de la pirámide no es perpendicular a su base.

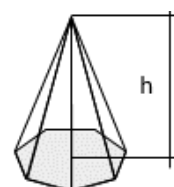
Pirámide recta. Determinación de área y volumen



Área lateral
 $A_L = 1/2 \cdot P_B \cdot h_c$



Área total
 $A_T = A_L + A_B$

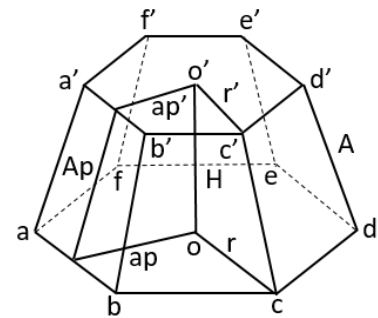


Volumen
 $V = 1/3 \cdot A_B \cdot h$

Referencias: A_B (área de la base), A_L (área lateral), h (altura), h_c (altura de la cara), P_B (perímetro de la base), V (volumen).

1.3.2.1. Tronco de pirámide

Si una pirámide se secciona con un plano π , paralelo al plano de base, se llama **tronco de pirámide** a la intersección de la pirámide y el semiespacio de borde π que no contiene al vértice. Elementos: base mayor (abcdef), base menor (a'b'c'd'e'f'), altura (H), aristas (segmento determinado por dos vértices correspondientes de las bases) y apotema (segmento determinado por un par de puntos medios de dos lados correspondientes de las bases).



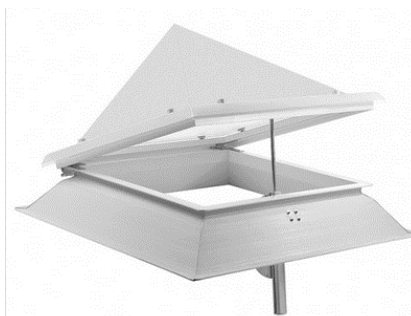
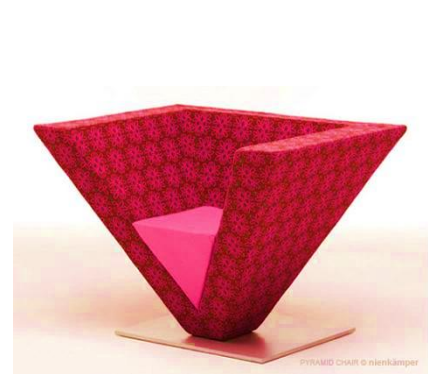
Tronco de pirámide. Determinación de área y volumen

Área lateral
 $AL = 1/2 \cdot (P_B + P_b) \cdot h_c$

Área total
 $A_T = A_B + A_b$

Volumen
 $V = 1/3 \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) \cdot h$

Referencias: A_B (área de la base mayor), A_b (área de la base menor), A_L (área lateral), h (altura), h_c (altura de la cara), P_B (perímetro de la base mayor), P_b (perímetro de la base menor), V (volumen).



Objetos diseñados a partir de poliedros regulares e irregulares.

II. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Si el área de un icosaedro es $980\sqrt{3}\text{ cm}^2$: ¿cuánto mide su arista?

Ejercicio 2.

¿Cuál es el área de un dodecaedro si la apotema de una de sus caras mide 5,2 cm?

Ejercicio 3

El área total de un tetraedro es $36\sqrt{3}\text{ cm}^2$. Hallar la altura de una de sus caras.

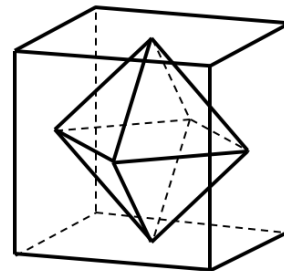
Ejercicio 4

Calcular la longitud de la diagonal de un cubo de 2500 cm^2 de superficie.

Ejercicio 5

Los vértices del octaedro regular coinciden con la intersección de las diagonales de las caras del hexaedro. Se pide:

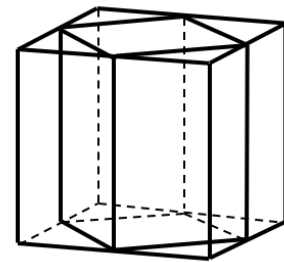
- Calcular el valor de la arista del octaedro sabiendo que el volumen del hexaedro es igual a 800 cm^3 .
- ¿Qué porcentaje representa la superficie del octaedro respecto del hexaedro que lo contiene?



Ejercicio 6

El hexaedro mayor, de 2400 cm^2 de superficie total, contiene un prisma de base cuadrada, tal como muestra la figura. Se pide:

- Hallar el valor del lado de la base del prisma menor.
- Calcular el volumen del prisma menor.



Ejercicio 7

La imagen nos muestra distintos dados con formas de poliedros. Se pide:

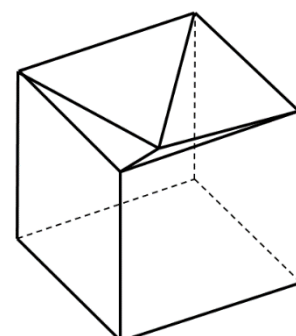
- Analizar para el caso de los poliedros regulares la cantidad de números que podrían contener considerando uno por cara.
- Calcular la cantidad de material (superficie) necesario para fabricar 250 dados con forma de tetraedro de arista igual a 25 mm.
- ¿En qué porcentaje se incrementa la superficie del tetraedro si la arista mide 30 mm?



Ejercicio 8

De un cubo de 60 cm de arista se ha extraído una pirámide cuya altura es igual a la tercera parte de la arista del cubo, tal como se muestra en la figura.

¿Cuál es el volumen del cuerpo resultante?



Ejercicio 9

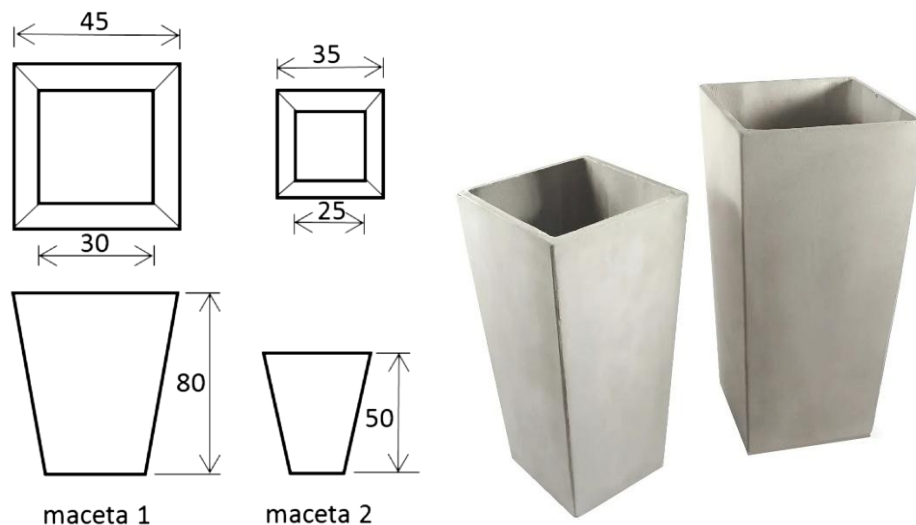
Se desea llenar una pileta de natación, de 0,80 m de profundidad, con forma de prisma recto de base decagonal de 3 m de diámetro.

- ¿Cuántos litros de agua se necesitan para llenarla hasta 10 cm de su altura?
- ¿Cuántos litros de agua se necesitarán para llenarla completa si su diámetro se incrementa un 50%?

Ejercicio 10

La imagen muestra dos macetea de distintas formas y dimensiones. Para los dos casos, las paredes poseen un espesor de 8 mm. A partir de los datos del gráfico que especifican las medidas exteriores (en cm), se pide:

- Calcular el volumen de cada maceta sin considerar el espesor, utilizando las medidas exteriores.
- Calcular el área exterior (caras laterales más base) para cada caso.
- Responder: ¿qué altura tendrá una maceta con forma de prisma recto de base cuadrada de lado igual a 35 cm para alojar la misma cantidad de tierra que la maceta 1?



Respuestas ejercicios

Ejercicio 1

Arista: $a = 14$ cm

Ejercicio 2

Área: $A = 1178,740953$ cm²

Ejercicio 3

Altura: $h = 5,196152423$ cm

Ejercicio 4

Longitud: $l = 35,35533906$ cm

Ejercicio 5

- Arista: $a = 6,564197879$ cm
- Porcentaje: 28,8675 %

Ejercicio 6

- Lado: $l = 14,14213562$ cm
- Volumen: $V = 4000$ cm³

Ejercicio 7

- a) Tetraedro (4), hexaedro (6), octaedro (8), dodecaedro (12), icosaedro (20)
- b) Cantidad de material: $S = 270640,625 \text{ cm}^2$
- c) Porcentaje: 44 %

Ejercicio 8

Volumen: $V = 192000 \text{ cm}^3$

Ejercicio 9

- a) 661,2584088 litros
- b) 11902,65136 litros

Ejercicio 10

- a) Volumen maceta 1: $V = 114000 \text{ cm}^3$
Volumen maceta 2: $V = 45416,67 \text{ cm}^3$
- b) Superficie maceta 1: $S = 12952,61901 \text{ cm}^2$
Superficie maceta 2: $S = 6654,925373 \text{ cm}^2$
- c) Altura: $h = 93,06122449 \text{ cm}$

III. AUTOEVALUACIÓN

- 1) ¿Qué es un poliedro?
 - a) Un cuerpo geométrico limitado por esferas.
 - b) Un cuerpo geométrico limitado por porciones de planos llamadas caras.
 - c) Una figura plana formada por polígonos regulares.
 - d) Una figura espacial sin caras planas.
- 2) ¿Cuántos poliedros regulares existen?
 - a) 4
 - b) 5
 - c) 6
 - d) 8
- 3) El cubo es también conocido como:
 - a) Tetraedro
 - b) Hexaedro
 - c) Dodecaedro
 - d) Icosaedro
- 4) ¿Cuál de las siguientes características corresponde a los sólidos platónicos?
 - a) Sus caras pueden ser polígonos irregulares.
 - b) Sus aristas tienen diferentes longitudes.
 - c) En cada vértice concurren el mismo número de caras y aristas.
 - d) Están limitados por círculos congruentes.
- 5) ¿Qué elemento caracteriza a los prismas?
 - a) Una base circular.
 - b) Dos bases poligonales paralelas y congruentes.
 - c) Una base triangular y un vértice común.
 - d) Todas sus aristas son curvas.
- 6) ¿Cuál es la fórmula del volumen de una pirámide recta de base poligonal y altura h ?
 - a) $V = AB \cdot h$
 - b) $V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot h$
 - c) $V = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot hc$
 - d) $V = (AB + Ab) \cdot h$
- 7) Un tronco de pirámide se obtiene cuando:
 - a) Se divide una pirámide en dos con un plano paralelo a la base.
 - b) Se eliminan las aristas laterales de una pirámide.
 - c) Se reemplaza la base de una pirámide por un círculo.
 - d) Se construye una pirámide con base cuadrada.
- 8) ¿Qué poliedro tiene 20 caras triangulares?
 - a) Dodecaedro
 - b) Octaedro
 - c) Icosaedro
 - d) Tetraedro
- 9) El ángulo diédrico es:
 - a) El ángulo que forman dos rectas secantes.
 - b) El ángulo que forman dos planos que se intersectan.

- c) El ángulo entre dos caras opuestas de un cubo.
 - d) El ángulo de inclinación de una pirámide.
- 10) ¿Qué relación existe entre el volumen de un prisma recto de base cuadrada y el de una pirámide recta de igual base y altura?
- a) Son iguales.
 - b) El del prisma es el doble que el de la pirámide.
 - c) El del prisma es el triple que el de la pirámide.
 - d) El del prisma es la mitad que el de la pirámide.

Respuestas autoevaluación

- 1) b) Un cuerpo geométrico limitado por porciones de planos llamadas caras.
- 2) b) 5
- 3) b) Hexaedro.
- 4) c) En cada vértice concurren el mismo número de caras y aristas.
- 5) b) Dos bases poligonales paralelas y congruentes.
- 6) b) $V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot h$
- 7) a) Se divide una pirámide en dos con un plano paralelo a la base.
- 8) c) Icosaedro.
- 9) b) El ángulo que forman dos planos que se intersectan.
- 10) c) El del prisma es el triple que el de la pirámide.

BIBLIOGRAFÍA

- ALMADA, Pablo et al. (2015). Matemática 1B. Guía Teórico Práctica. Córdoba: Editorial FAUD-UNC.
- ALMADA, Pablo et al. (2017). Matemática para Diseño Industrial. Guía Teórico Práctica. Córdoba: Editorial FAUD-UNC.
- ALMADA, Pablo et al. (2021). Matemática para Diseño Industrial. Córdoba: Editorial FAUD-UNC.
- ALSINA, Claudi y Trillas, Enric (1984). Lecciones de Álgebra y Geometría: curso para estudiantes de Arquitectura. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.
- ALSINA, Claudi (2000). Los polígonos, los poliedros y usted. Buenos Aires: Red Olímpica.
- ALSINA, Claudi, Conferencia Cómo enseñar Matemáticas en Carreras de Arquitectura y no morir en el intento, Barcelona.
- AULAS VIRTUALES en línea. Plataforma Moodle. Cátedra Matemática para Diseño Industrial y Matemática 1B para Arquitectura. FAUD, UNC. Disponible en: <http://uncavim10.unc.edu.ar>
- CEBALLOS, Mariana, Infante, María Alejandra et al (2006). El Irracional. Propuesta Didáctica Interdisciplinar. Córdoba: Editorial Comunicarte.
- COURANT, Richard y Robbins, Herbert (2003). ¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y Métodos Fundamentales. España: Reeditado por el Fondo de la Cultura Económica.
- DI PIETRO, Donato (1975). Geometría Analítica del Plano y del Espacio y Nomografía. Buenos Aires: Editorial Alsina.
- DÓCZI, György (2004). El poder de los límites. Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura. Buenos Aires: Troquel.
- GHYKA, Matila (1983). Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. Barcelona: Poseidón.
- HAASER, Norman, La Salle, Joseph y Sullivan, Joseph (2000). Análisis Matemático 1: Curso de Introducción, México: Editorial Trillas.
- HAASER, Norman, La Salle, Joseph y Sullivan, Joseph (2000). Análisis Matemático 2: Curso Intermedio. México: Editorial Trillas.
- LEHMANN, Charles (2009). Geometría Analítica. México: Editorial LIMUSA.
- MANDELBROT, Benoît (2009). La geometría fractal de la naturaleza. Barcelona: Tusquets Editores.
- NICOLINI, Ángeles, Santa María, Graciela y Vasino, Susana (1998). Matemática para Arquitectura y Diseño. Buenos Aires: Editorial Nueva Librería.
- NOTTOLI, Hernán (2017). Enseñanza de Matemática para Arquitectos y Diseñadores. Buenos Aires: Diseño
- OTEIZA, Lam et al (2005). Geometría Analítica. México: Editorial PEARSON.
- POLLACK, Henry (1997). Solving Problems in the Real World, L.A. Steen.

SULLIVAN, Michael (2006). Álgebra y Trigonometría. México: Editorial PEARSON.

SWOKOWSKI, Earl y Cole, Jeffery (2002). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Editorial Mc Graw Hill.

TAPIA, Carlos et al (1975). Matemática 2. Buenos Aires: Editorial Estrada.